Zadání 5. série

Termín odeslání: 7. prosinec 2015

Adresa: *Korespondenční seminář iKS*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Czech republic

Úloha A5. Dvojice nekonečných posloupností celých čísel a_1, a_2, … a b_1, b_2, … splňuje pro $n \geq 3$ vztah

$$(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})(b_n - b_{n-2}) = 0.$$

Ukažte, že existuje přirozené k takové, že $a_k = a_{k+2016}$.

Úloha N5. Na kružnici leží $n \geq 2$ přirozených čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nechť

$$k_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i},$$

kde indexy bereme modulo n. Pokud platí, že pro každé i je k_i celé číslo, ukažte, že

$$2n \leq \sum_{i=1}^{n} k_i < 3n.$$

Úloha G5. V trojúhelníku ABC leží body D a E na stranách AB, resp. AC tak, že $|DB| = |BC| = |CE|$. Nechť F je průsečík BE a CD. Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníka ABC, H je ortocentrum trojúhelníka DEF a M je střed oblouku BAC. Ukažte, že I, H a M leží na jedné přímce.

Úloha C5. Nechť $k \geq 2$ a $n \geq k - 1$ jsou daná přirozená čísla. Rado a Matěj hrají hru. Na začátku Rado na tabuli napíše za sebou n celých čísel. Matěj může v každém kroku zvolit libovolně dlouhý souvislý blok za sebou jdoucích čísel (klidně může i všechna, nebo naopak jenom jedno). Rado pak buď všechna čísla v tomto bloku zvýší o jedničku, nebo všechna o jedničku sníží. Matěj vyhraje, pokud se na tabuli objeví alespoň $n - k + 2$ čísel dělitelných k. Ukažte, že Matěj umí vyhrát v konečném počtu kroků.