

Zadání 5. série

Termín odeslání: 22. prosinec 2025

Adresa submitka: www.iksko.org/submit

Email pro dotazy: info@iksko.org

Úloha C5. Množina n čtverců v rovině se nazývá *přátelská*, pokud splňuje následující kritéria:

- Všechny čtverce jsou shodné.
- Kdykoliv mají dva čtverce společný bod P , pak P je vrchol obou čtverců.
- Každý čtverec se dotýká přesně tří dalších čtverců.

Kolik kladných celých čísel n je mezi $2025 \leq n \leq 5202$ takových, že existuje množina n čtverců, která je přátelská?

Úloha A5. Určete všechny polynomy P s celočíselnými koeficienty, které splňují $0 \leq P(n) \leq n!$ pro všechna nezáporná celá čísla n .

Úloha N5. Pro všechna kladná celá čísla n je funkce $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ definována jako $\gamma(1) = 0$ a pro všechna $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} > 1$ je $\gamma(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$. Mějme aritmetickou posloupnost přirozených čísel $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Nechť pro kladné celé číslo $a > 1$ je posloupnost $\{\gamma(a^{x_i} - 1)\}_{i=1}^{\infty}$ také aritmetickou posloupností. Ukažte, že posloupnost X musí být konstantní.

Úloha G5. V trojúhelníku ABC jsou M, N a P středy stran BC, CA a AB . Bod K leží na úsečce NP tak, že AK je osa úhlů $\sphericalangle BKC$. Nechť přímky MN, BK se protínají v bodě E a přímky MP, CK se protínají v bodě F . Předpokládejme, že H je pata kolmice z bodu A na úsečku BC a L je druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům AKH a HEF . Dokažte, že přímky MK, EF a HL se protínají v jednom bodě.