Zadání 3. série

Termín odeslání: 19. prosince 2011

Adresa pro odeslání: *Korespondenční seminář iKS*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Česká republika

Úloha A3. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující zároveň:

(i) existuje reálné číslo M takové, že pro každé reálné číslo x je $f(x) < M$,
(ii) pro každou dvojici reálných čísel x a y platí

$$f\big(xf(y)\big) + yf(x) = xf(y) + f(xy).$$

Úloha C3. Na ultramaraton postupně vyběhlo a do cíle postupně dorazilo n běžců. Během závodu se mezi sebou různě předbíhali, po jeho skončení jsme zjistili tato fakta:

(i) každý běžec předběhl stejný počet běžců,
(ii) žádní dva běžci nebyli předběhnuti stejným počtem běžců,
(iii) žádný běžec nebyl předběhnut dvakrát tím samým běžcem.

Určete všechny možné hodnoty n.

Úloha G3. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P. Označme A', B', C' paty kolmic spuštěných z bodu P na příslušné strany. Dále nechť A'' je průsečík kružnice opsané trojúhelníku $A'B'C'$ a strany BC různý od A'. Konečně nalezněme na úsečce $A''B'$ bod X takový, že $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle PAB|$. Ukažte, že $|\sphericalangle AXB| = 90^\circ$.

Úloha N3.

(a) Existuje 2011 po dvou různých přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým z nich?

(b) Existuje 2011 po dvou různých přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný součtem každých dvou z nich?