

## Zadání 3. série

**Termín odeslání:** 21. září 2026

**Adresa submitka:** [www.iksko.org/submit](http://www.iksko.org/submit)

**Email pro dotazy:** [info@iksko.org](mailto:info@iksko.org)

**Úloha A3.** Existují dvě omezené nekonečné posloupnosti  $a_1, a_2, \dots$  a  $b_1, b_2, \dots$  takové, že pro všechna kladná celá čísla  $n$  a  $m > n$  platí alespoň jedna z nerovností  $|a_m - a_n| > 1/\sqrt{n}$  a  $|b_m - b_n| > 1/\sqrt{n}$ ?

**Úloha N3.** Dokažte, že existuje nekonečně mnoho dvojic kladných celých čísel  $a < b$  takových, že každé z čísel  $\gcd(a, b)$ ,  $\gcd(a + 1, b)$ ,  $\gcd(a, b + 1)$  a  $\gcd(a + 1, b + 1)$  je alespoň  $\sqrt{b/6}$ .

**Úloha C3.** Alex a Petr hrají následující hru. Na stole leží  $n$  karet očíslovaných čísly  $1, 2, \dots, n$ , kde  $n$  a  $k$  jsou kladná celá čísla splňující  $n \geq 2k + 1$ . Petr si tajně vybere  $2k + 1$  z těchto karet a uspořádá je v nějakém pořadí. Poté je jednu po druhé v tomto pořadí ukazuje Alexovi. Po každé ukázané kartě se Alex může rozhodnout, že právě tuto kartu podepíše. Jakmile jednou nějakou kartu podepíše, už další podepsat nesmí. Nejpozději po ukázání poslední karty musí být některá karta podepsaná.

Označme  $A$  číslo na kartě, kterou Alex podepsal. Dále označme  $M$  medián čísel na všech  $2k + 1$  kartách, které Petr ukázal. Alexovo skóre je  $|M - A|$ . Alex chce mít jistotu, že jeho skóre bude co nejmenší, bez ohledu na to, které karty Petr vybere a v jakém pořadí je ukáže. Pro daná  $n$  a  $k$  určete nejmenší celé číslo  $d$ , pro které má Alex strategii zaručující skóre nejvýše  $d$ .

**Úloha G3.** Body  $D$  a  $E$  jsou zvoleny postupně na úsečkách  $AB$  a  $AC$  trojúhelníku  $\triangle ABC$ . Necht'  $\omega$  je kružnice opsaná trojúhelníku  $\triangle ADE$ . Necht'  $D' \neq D$  a  $E' \neq E$  jsou body na  $\omega$  takové, že  $|BD'| = |BD| = |CE| = |CE'|$ . Osa úsečky  $BC$  protíná  $\omega$  v bodech  $R$  a  $S$ , přičemž  $S$  leží na stejné straně přímky  $DE$  jako bod  $A$ , zatímco  $R$  nikoli. Dokažte, že kolmice vedená z bodu  $B$  na přímkou  $SD'$  a kolmice vedená z bodu  $C$  na přímkou  $SE'$  se protínají na přímce  $AR$ .