Zadanie 2. série

Termín odoslania: 27. jún 2022

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha A2. Nech k je kladné celé číslo a nech bijekcia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ má nasledujúcu vlastnosť: Ak pre dvojicu celých čísel i, j platí $|i - j| \leq k$, potom tiež platí $|f(i) - f(j)| \leq k$. Ukážte, že pre ľubovoľnú dvojicu celých čísel i, j platí $|f(i) - f(j)| = |i - j|$.

Úloha C2. Nech X je množina všetkých vrcholov n-rozmernej kocky, teda nech obsahuje všetkých 2^n bodov tvaru $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$. Ukážte, že ktorákoľvek jej podmnožina $Y \subseteq X$ s viac ako $\frac{2^{n+1}}{n}$ prvkami obsahuje trojicu bodov, ktoré sú vrcholmi rovnostranného trojuholníka.[1]

Úloha G2. Je daný trojuholník ABC, ktorého kružnica vpísaná sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch X, Y, Z. Nech ω_1, ω_2, ω_3 sú kružnice s tetivami po rade YZ, XZ, XY také, že ω_1 sa pretne s ω_2 na priamke CZ a ω_1 s ω_3 na priamke BY.

Predpokladajme, že ω_1 pretla XY, ZX druhýkrát v bodoch J, M, zatiaľ čo ω_2 pretla YZ, XY druhýkrát v bodoch L, I a konečne ω_3 pretla YZ, ZX druhýkrát v bodoch K, N. Dokážte, že body I, J, K, L, M, N ležia na jednej kružnici.

Úloha N2. Nájdite všetky kladné celá čísla n, pre ktoré platí

$$\tau(n) \mid 2^{\sigma(n)} - 1,$$

kde $\tau(n)$ značí počet kladných deliteľov čísla n a $\sigma(n)$ značí súčet týchto deliteľov.

[1] Vzdialenosť bodov x, y je daná obvyklým vzťahom $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$.