Riešenia 6. série

Úloha A6. *Nech $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ je postupnosť reálnych čísel taká, že $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{4}{3}$ a pre všetky prirodzené $n \geq 2$ platí $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n a_{n-1}}$.*

Dokážte, že $1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq 2a_n$ platí pre všetky prirodzené n.

Riešenie. (Podľa Danila Koževnikova)

Nerovnosť dokážeme matematickou indukciou. Pre $n = 1$ tvrdenie zjavne platí. Predpokladajme, že platí pre n. Potom platí

$$1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \geq 2a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$$

Na dôkaz tvrdenie pre $n + 1$ teda potrebujeme dokázať nerovnosť

$$2a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \geq 2a_{n+1}$$

Tú postupne upravujeme:

$$2a_n a_{n+1} + 1 \geq 2a_{n+1}^2$$
$$2a_n a_{n+1} + 2 \geq 2a_{n+1}^2 + 1$$
$$2a_{n+2}^2 \geq 2a_{n+1}^2 + 1$$
$$a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 \geq \frac{1}{2}$$

Stačí teda dokázať že pre všetky $m \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{m+1}^2 - a_m^2 \geq \frac{1}{2} \tag{1}$$

Túto nerovnosť dokážeme taktiež matematickou indukciou. Pre $m = 1$ a $m = 2$ tvrdenie zjavne platí. Predpokladajme, že nerovnosť (1) platí pre nejaké m. Dokážeme ju pre $m + 2$. Vďaka tomu, že sme ju dokázali pre $m = 1$ a $m = 2$, bude potom platiť pre všetky m. Stačí dokázať:

$$a_{m+3}^2 - a_{m+2}^2 \geq \frac{1}{2} \tag{2}$$
$$1 + a_{m+2}a_{m+1} - (1 + a_{m+1}a_m) \geq \frac{1}{2}$$
$$a_{m+2}a_{m+1} \geq \frac{1}{2} + a_{m+1}a_m$$
$$a_{m+2}^2 a_{m+1}^2 \geq \frac{1}{4} + a_{m+1}a_m + a_{m+1}^2 a_m^2$$
$$(1 + a_{m+1}a_m)a_{m+1}^2 \geq \frac{1}{4} + a_{m+1}a_m + a_{m+1}^2 a_m^2$$
$$a_{m+1}^2 + a_{m+1}^3 a_m \geq \frac{1}{4} + a_{m+1}a_m + a_{m+1}^2 a_m^2$$
$$a_{m+1}^2 a_m (a_{m+1} - a_m) + \left(a_{m+1}^2 - a_{m+1}a_m - \frac{1}{4}\right) \geq 0$$

Podľa IP zrejme platí $a_{m+1} - a_m > 0$ a ďalej

$$a_{m+1}^2 \overset{\text{(IP)}}{>} \frac{a_{m+1}^2}{2} + \frac{a_m^2}{2} + \frac{1}{4} \overset{\text{(AG)}}{>} a_{m+1}a_m + \frac{1}{4}$$

Postupnosť a_n je zrejme kladná, takže jediná možná neekvivalentná úprava umocnenie bola ekvivalentná. Dokázali sme teda nerovnosť (2), a tým pádom aj nerovnosť (1), a teda aj nerovnosť za zadania.

Iné riešenie (Podľa *Samuela Sládeka*) Zrejme sú všetky členy postupnosti aspoň 1. Stačí dokázať nerovnosť (1). Pre $m = 1$ platí. Pre $m \geq 2$ dokážeme namiesto toho dvojicu nerovností

$$\frac{3}{4} \geq a_{m+1}^2 - a_m^2 \geq \frac{1}{2} \tag{3}$$

Znova postupujeme indukciou. Pre $m = 2$ to platí. Nech to platí pre dané $m \in \mathbb{N}$. Potom

$$a_{m+2}^2 = 1 + a_{m+1}a_m \overset{(3)}{\leq} 1 + a_{m+1}\sqrt{a_{m+1}^2 - \frac{1}{2}} \leq a_{m+1}^2 + \frac{3}{4}$$

pričom poslednú nerovnosť ľahko overíme, keďže ide o nerovnosť jednej premennej. Analogicky

$$a_{m+2}^2 = 1 + a_{m+1}a_m \overset{(3)}{\geq} 1 + a_{m+1}\sqrt{a_{m+1}^2 - \frac{3}{4}} \geq a_{m+1}^2 + \frac{1}{2}$$

Analogicky máme ľahko overiteľnú nerovnosť. Iným spôsobom sme teda dokázali postačujúcu nerovnosť (1).

(Patrik Bak)

Úloha G6. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Na jeho stranách BC, AC, AB ležia postupne body X, Y, Z. Kružnice opísané trojuholníkom BXZ a CXY sa druhýkrát pretínajú v bode $P \neq X$. Ďalej nech X', Y', Z' sú obrazy X, Y, Z v stredových súmernostiach podľa stredov úsečiek BC, AC, AB. Kružnice opísané trojuholníkom $BX'Z'$ a $CX'Y'$ sa druhýkrát pretínajú v bode $Q \neq X'$. Dokážte, že $|OP| = |OQ|$.*

Riešenie. Začneme tým, že pre jednoduchosť (aby sme nemuseli vyšetrovať veľa prípadov kde čo leží) budeme v celom riešení používať orientované uhly. Značiť ich budem normálne, teda $\angle ABC$ je orientovaný uhol medzi priamkami AB a AC.

Začneme tým, že bod P môžeme definovať aj ako bod, ktorý spĺňa rovnosť $|\angle PXB| = |\angle PYC| = |\angle PZA|$, lebo z nich vyplýva, že P leží na príslušných kružniciach. Tak isto Q môžeme definovať ako bod, ktorý spĺňa rovnosti $|\angle QX'C| = |\angle QY'A| = |\angle QZ'B|$. Pre geometrických nadšencov dodávam, že bod P (resp. Q) sa nazýva Miquelov bod (pre X, Y, Z), a môžu si pohľadať čo o ňom ešte platí.

Nech $|\angle PXB| = \phi$.

Teraz rozoberieme špeciálny prípad, a síce, že $\phi = 90°$. Ak bodmi X', Y', Z' vedieme kolmice na strany BC, AC, AB, tak tieto priamky sú zrejme obrazmi priamok PX, PY, PZ v osových súmernostiach podľa osí strán BC, AC, AB. Osi strán sa pretínajú v O, preto tieto priamky budú prechádzať bodom, ktorý je obrazom P v stredovej súmernosti podľa O. Ak si tento bod označíme R, tak zrejme spĺňa, že $|\angle RX'C| = |\angle RY'A| = |\angle RZ'B| = 90°$, preto $R \equiv Q$, a naozaj $|OP| = |OQ|$.

V opačnom prípade ($\phi \neq 90°$) označme K, L priesečníky priamok XP, YP s osami strán BC, AC. Platí $|\angle OKP| = |\angle OLP| = 90° - \phi$. Nech R je priesečník priamok KX' a LY', ktoré sú zrejme obrazmi XP, YP v osových súmernostiach podľa osí strán. Preto platí $|\angle RKP| = |\angle RLP| = -2\phi$. Teda body R, L, K, P ležia na kružnici. Osi uhlov $\angle RKP, \angle RLP$ sú osi strán BC, AC no musia sa pretínať v strede oblúka RP tejto kružnice. Preto aj O leží na tej kružnici.

Označme M priesečník priamky PZ a tej kružnice. Z obvodových uhlov platí $|\angle RMO| = |\angle OMP| = 90^\circ - \phi$ a preto je os strany AB osou uhla $\angle PMR$. No to znamená, MR prechádza bodom Z' a $|\angle RZ'B| = \phi$ a tak isto vieme, že $|\angle RX'C| = |\angle RY'A| = \phi$ a preto $R \equiv Q$. A keďže O je stred oblúka PQ, tak $|OP| = |OQ|$. *(Martin „Vodka“ Vodička)*

Úloha C6. *Na sústredení iKS sú účastníci rozdelení do skupín. Tie sa však každý deň menia a to nasledovným spôsobom: V každej skupine sa zvolí jeden účastník ako najlepší, a potom sa všetci najlepší účastníci odtrhnú od pôvodnej skupiny a vytvoria jednu novú skupinu. Skupina, ktorá mala pred tým len jedného člena tak zanikne. Predpokladajme, že na sústredení je n účastníkov a všetci sú na začiatku v jednej skupine. Dokážte, že v počnúc niektorým dňom sústredenia[1] bude stále v každej skupine najviac $1 + \sqrt{2n}$ ľudí.*

Riešenie. (Na motívy riešenia Sama Sládka)

Aktuálne počty účastníkov v skupinách vieme reprezentovať multimnožnou. Napríklad multimnožinu s prvkami a, a, a, b budeme značiť $\{a, a, a, b\}$. Súčet multimnožín $A \uplus B$ je multimnožina, ktorá každý prvok x obsahuje toľkokrát, koľkokrát je obsiahnutý v A plus koľkokrát je v B.

Dokážeme najprv nasledujúce pomocné tvrdenie.

Lema ♠. Každé prirodzené číslo n jednoznačne určuje $k \in \mathbb{N}, l \in \{1, 2, \ldots, k\}$ také, že $n = (\sum_{i=1}^{k} i) - l$. To znamená, že sa dá jednoznačne zapísať ako súčet $1, 2, \ldots, k$ bez l — multimnožinu obsahujúcu týchto $(k-1)$ čísel označíme $(k_n, l_n) = [n]$. Špeciálne, $(0, 0) = [0]$ nech je prázdna multimnožina.

Dôkaz: Onen súčet je rovný $\diamondsuit = \frac{k(k+1)}{2} - l$. Keď si zvolíme k pevné, tak postupne pre všetky možné hodnoty $l = k, k-1, \ldots, 1$ nadobúda $\diamondsuit$ hodnoty

$$\frac{k(k+1)}{2} - k = \frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(k-1)}{2} + 1, \ldots, \frac{k(k+1)}{2} - 1$$

Takže pre vie nadobudnúť hodnoty z intervalu

$$M_k = \left\langle \frac{k(k-1)}{2}; \frac{k(k+1)}{2} \right)$$

a každej z hodnôt vyhovuje práve jedno l. Upustime od pevného k. Všimneme si, že ľavý koniec intervalu M_{k+1} je pravým koncom M_k — teda intervaly sú disjunktné, a každé číslo vie $\diamondsuit$ nadobudnúť najviac raz. Navyše pre ľubovoľné x existuje y také, že $x < \frac{y(y+1)}{2}$ — potom $x \in M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_y$, preto každé číslo vie $\diamondsuit$ nadobudnúť.

Pre naše potreby budeme ignorovať nulové prvky multimnožín (nakoľko nemá zmysel uvažovať skupiny s 0 účastníkmi).

Lema ♡. Nech veľkosti skupín sú $\{a\} \uplus [b]$ pre $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}_0$. Potom nasledujúci deň sú veľkosti skupín $\{a-1\} \uplus [b+1]$.

Dôkaz: Pre $b = 0$ to ľahko overíme, ďalej predpokladajme $b > 0$. Po odobratí 1 člena z $\{a\}$ ostane $\{a-1\}$. Zamerajme sa ďalej na $[b] = (k_b, l_b)$.

1. Ak $l_b = 1$, po odobratí 1 člena z každej skupiny zostane (k_b, k_b). Následne pridáme skupinu o veľkosti $1 + (k_b - 1) = k_b$ a dostaneme $(k_b+1, k_b+1) = [\frac{(k_b+1)(k_b+2)}{2} - (k_b+1)] = [\frac{k_b(k_b+1)}{2}] = [(\frac{k_b(k_b+1)}{2} - 1) + 1] = [b+1]$.
2. Ak $l_b > 1$, po odobratí 1 člena z každej skupiny zostane $(k_b - 1, l_b - 1)$. Pridáme skupinu o veľkosti $1 + (k_b - 1) = k_b$ a dostaneme $(k_b, l_b - 1) = [b+1]$.

[1] sútredenie trvá nekonečne dlho

Teraz vyriešime pôvodný problém. Nech je na začiatku iba jedna skupina o veľkosti n. Teda skupiny sú $\{n\} \uplus [0]$, podľa $\heartsuit$ nasledujúce dni sú skupiny

$$\{n-1\} \uplus [1],\ \{n-2\} \uplus [2],\ \dots,\ \{1\} \uplus [n-1],\ \{0\} \uplus [n]$$

Všimneme si, že $\{0\} \uplus [n] = [n] = (k_n, l_n)$. Rozoberme prípady:

1. Ak $l_n = k_n$, potom $(k_n, l_n) = \{k_n - 1\} \uplus (k_n - 1, l_n - 1) = \{k_n - 1\} \uplus [n - k_n + 1]$. Máme teda cyklus

$$\{k_n - 1\} \uplus [n - k_n + 1],\ \{k_n - 2\} \uplus [n - k_n + 2],\ \dots,\ \{1\} \uplus [n-1],\ \{0\} \uplus [n]$$

Všetky stavy majú tvar $\{k_n - 1 - a\} \uplus [n - k_n + 1 + a]$. Platí $k_n - 1 - a \leq k_n - 1$, $n - k_n + 1 + a \leq n$, takže najväčšia skupina je buď $k_n - 1$, alebo najväčšia skupina v $[n] = (k_n, l_n) = (k_n, k_n)$ — teda tiež $k_n - 1$. Platí

$$\begin{aligned}
n &= \frac{k_n(k_n+1)}{2} - k_n = \frac{k_n(k_n-1)}{2} \\
2n &= k_n(k_n-1) \\
2n + \frac{1}{4} &= k_n^2 - k_n + \frac{1}{4} = (k_n - \frac{1}{2})^2 \\
\sqrt{2n + \frac{1}{4}} &= k_n - \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2} + \sqrt{2n + \frac{1}{4}} &= k_n - 1
\end{aligned}$$

2. Ak $l_n < k_n$, potom $(k_n, l_n) = \{k_n\} \uplus (k_n - 1, l_n) = \{k_n\} \uplus [n - k_n]$. Máme cyklus

$$\{k_n\} \uplus [n - k_n],\ \{k_n - 1\} \uplus [n - k_n + 1],\ \dots,\ \{1\} \uplus [n-1],\ \{0\} \uplus [n]$$

Analogicky ako v predchádzajúcom prípade sa ukáže, že najväčšia skupina má veľkosť k_n. Platí

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{k_n(k_n+1)}{2} - k_n < & \frac{k_n(k_n+1)}{2} - l_n & < \dfrac{k_n(k_n+1)}{2} \\
\dfrac{(k_n-1)k_n}{2} < & n & < \dfrac{k_n(k_n+1)}{2} \\
k_n^2 - k_n + \dfrac{1}{4} < & 2n + \frac{1}{4} & < k_n^2 + k_n + \dfrac{1}{4} \\
(k_n - \dfrac{1}{2})^2 < & 2n + \frac{1}{4} & < (k_n + \dfrac{1}{2})^2 \\
k_n - \dfrac{1}{2} < & \sqrt{2n + \frac{1}{4}} & < k_n + \dfrac{1}{2}
\end{array}$$

Odtiaľ plynú odhady $k_n < \frac{1}{2} + \sqrt{2n + \frac{1}{4}}$ a $k_n > -\frac{1}{2} + \sqrt{2n + \frac{1}{4}}$, teda

$$k_n \in \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{2n + \frac{1}{4}};\ \frac{1}{2} + \sqrt{2n + \frac{1}{4}} \right)$$

Ľahko sa dá ukázať, že $-\frac{1}{2} + \sqrt{2n + \frac{1}{4}}$ nemôže byť (pre $l_n < k_n$) celé číslo, potom

$$k_n = \left\lceil -\frac{1}{2} + \sqrt{2n + \frac{1}{4}} \right\rceil$$

V oboch prípadoch dostávame, že maximálna veľkosť skupiny po predperióde bude $\left\lceil -\frac{1}{2} + \sqrt{2n + \frac{1}{4}} \right\rceil$ (a tento odhad je tesný). Pre kompletnosť ukážeme, že to je $\leq 1 + \sqrt{2n}$. Na to nám stačí ukázať $\frac{1}{2} + \sqrt{2n + \frac{1}{4}} < 1 + \sqrt{2n}$, čo je ekvivalentné s

$$\begin{aligned} \sqrt{2n + \frac{1}{4}} &< \frac{1}{2} + \sqrt{2n} \\ 2n + \frac{1}{4} &< \frac{1}{4} + \sqrt{2n} + 2n \\ 0 &< \sqrt{2n} \end{aligned}$$

Poznámky opravujúceho. Riešenia boli dvoch typov. Prvý typ riešenia je reprezentovaný vzorovým, a snaží sa „zacykliť” — potom v nájdenom cykle nájde najväčšiu veľkosť skupiny, a pre ňu dokáže nerovnosť. Druhý typ riešenia (ktoré úspešne doviedol do konca iba *Jakub Löwit*) dokáže nerovnosť pre niektoré n — konkrétne pre všetky $n = \frac{k(k+1)}{2}$ pre nejaké prirodzené k. Potom ukazuje monotónnosť — teda že ak $n_1 > n_2$, tak odpoveď (najväčšia veľkosť skupiny v cykle) je v prvom prípade aspoň toľko, ako v druhom prípade. Detaily tohto riešenia prenechávame čitateľovi. *(Truc Lam „Buj“ Bui)*

Úloha N6. *Nech p je prvočíslo také, že $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Ukážte, že $(p-1)(p! + 2^n)$ má aspoň troch rôznych prvočíselných deliteľov pre všetky $n \in \mathbb{N}$.*

Riešenie. (Inšpirované Jakubom Löwitom)

Všimnime si, že $p = 2$ nevyhovuje podmienke, preto odteraz bude p nepárne prvočíslo. Dokážeme, že $(p-1)$ má pročíselné delitele 2 a q kde $q \neq 2$, a $(p! + 2^n)$ má prvočíselného delitela $r \neq 2$. Dokopy to bude stačiť na dôkaz nášho tvrdenia, lebo ak $q | p-1$ tak $q < p$ a ak $r | (p! + 2^n)$ tak $r > p$, teda prvočísla q a r sú rôzne.

$2 | p-1$ je triviálne, poďme sa pozrieť na zvyšné delitelnosti.

$q | p-1$: Sporom. Nech $p - 1 = 2^a$. Ak a obsahuje v rozklade nejaké nepárne prvočíslo s, môžme p rozložiť nasledovne ($a = ks$, $k \in \mathbb{N}$):

$$p = 2^{ks} + 1 = (2^k + 1) \left(\sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \cdot 2^{ki} \right)$$

Obe zátvorky sú väčšie ako 1, preto p nie je prvočíslo a nutne $p = 2^{2^b} + 1$. Čísla tohto tvaru sa nazývajú Fermatove čísla. Musí platiť nasledovné $2^{2^{2^b}} \equiv 1 \pmod{p^2}$. My však vieme $2^{2^{2^b}} - 1$ rozložiť:

$$2^{2^{2^b}} - 1 = (2^{2^{2^b-1}} + 1)(2^{2^{2^b-1}} - 1) = (2^{2^{2^b-1}} + 1)(2^{2^{2^b-2}} + 1) \cdots (2^{2^0} + 1)(2^{2^0} - 1)$$

Keďže $2^{2^b} + 1 \geq 2^{2^b} + 1$, tak na pravej strane sa vykytuje priamo p a iné Fermatove prvočísla. Avšak Fermatove čísla sú navzájom nesúdeliteľné[2], preto p^2 nemôže deliť pravú stranu. Spor.

$r | (p! + 2^n)$: Zase sporom. Nech $(p! + 2^n) = 2^m$ ($m \in \mathbb{N}$, je to väčšie ako 1). Potom platí:

$$\begin{aligned} (p! + 2^n) &\equiv 2^m && \pmod{p^2} \\ (p! + 2^n)^{p-1} &\equiv (2^m)^{p-1} && \pmod{p^2} \\ (2^n)^{p-1} + (p-1)p!(2^n)^{p-2} &\equiv (2^m)^{p-1} && \pmod{p^2} \end{aligned}$$

[2]hint: namiesto 2^b si daj x a pripočítaj k obom stranám rovnice 2

Posledné kongruencie platia, lebo z binomickej vety sú zvyšné členy delitelné p^2. Využime teraz predpoklad $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$:

$$\begin{aligned}(2^{p-1})^n + (p-1)p!(2^n)^{p-2} &\equiv (2^{p-1})^m \pmod{p^2}\\ 1^n + (p-1)p!(2^n)^{p-2} &\equiv 1^m \pmod{p^2}\\ (p-1)p!(2^n)^{p-2} &\equiv 0 \pmod{p^2}\end{aligned}$$

Výraz $(p-1)p!(2^n)^{p-2}$ je delitelný p ale nie p^2 a to je už vytúžený spor.

(Miro Psota)