

Řešení 1. série

Úloha A1. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, které splňují

$$x^2 f(x) + y f(y^2) = f(x + y) f(x^2 - xy + y^2)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Řešení. Dosadíme $[x; 0]$:

$$x^2 f(x) = f(x) f(x^2) \quad (1)$$

Dosazením $[0; 0]$ pak $0 = f(0)^2$, neboli $f(0) = 0$. Nakonec dosazením $[x; -x]$ dostaneme:

$$x^2 f(x) - x f(x^2) = f(0) f(3x^2) = 0 \quad (2)$$

Pro $x \neq 0$ tedy $f(x^2) = x f(x)$. Dosazením do (1) máme $x^2 f(x) = f(x) \cdot x f(x)$, neboli pro $x \neq 0$ dostaneme $f(x)(f(x) - x) = 0$. Máme tak, že pro každé $x \neq 0$ platí $f(x) \in \{0, x\}$, ale protože už víme $f(0) = 0$, tak toto platí i pro $x = 0$.

Nyní ukážeme, že nemohou existovat nenulová reálná čísla a, b taková, že $f(a) = 0$ a $f(b) = b$. Pro spor předpokládejme, že taková jsou. Z (2) víme, že $f(b) = b \implies f(b^2) = b f(b) = b^2$. Dosazením $[a; b]$ do zadání získáme:

$$\begin{aligned} a^2 f(a) + b f(b^2) &= f(a + b) f(a^2 - ab + b^2) \\ b^3 &= f(a + b) f(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

Kdyby bylo $f(a + b) = 0$ nebo $f(a^2 - ab + b^2) = 0$, tak $b^3 = 0$, což je spor s tím, že b je nenulové. Tím pádem z $f(x) \in \{0, x\}$ je $f(a + b) = a + b$ a $f(a^2 - ab + b^2) = a^2 - ab + b^2$, neboli po dosazení:

$$b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

Máme tak $a^3 = 0$, což je spor s tím, že a je nenulové.

Nemůže se nám tedy stát, že pro nějaká nenulová čísla je $f(x) = 0$ a zároveň pro jiná nenulová čísla je $f(x) = x$. Tím pádem jediná možná řešení jsou ta, kde pro všechna reálná čísla je $f(x) = 0$ nebo pro všechna reálná čísla je $f(x) = x$. ($f(0) = 0$ odpovídá oběma těmto případům.)

Jednoduchou zkouškou můžeme ověřit, že obě tato řešení vyhovují. Pro $f(x) = 0$ dostáváme

$$x^2 \cdot 0 + y \cdot 0 = 0 \cdot 0,$$

což zjevně platí pro všechna reálná x, y . Nakonec pro $f(x) = x$ dostáváme

$$x^2 \cdot x + y \cdot y^2 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3,$$

což opět zjevně platí pro všechna reálná x, y . Jediné vyhovující funkce jsou tedy $f(x) = 0$ a $f(x) = x$.

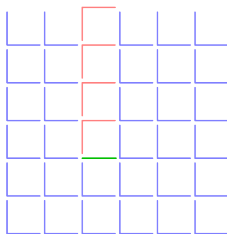
Poznámky opravujícího. Většina řešení se vydávala velmi podobným směrem jako řešení vzorové. Objevila se ale i taková, co vykročila trochu jinudy. Nakonec se ale v podstatě všechna dala rozdělit na dvě části. Ukázat, že $f(x) \in \{0, x\}$ pro všechna x a pak vyřešit tzv. *pointwise trap*, což je právě ta část, kdy řešíme, jestli nemůže funkce někdy být nula a jinde x . Nejčastější chyba byla právě ve vynechání druhé části.

(David Hromádka)

Úloha C1. Alicka a Jolča hrají hru na hranách nekonečné čtvercové mřížky, ve které se střídají v tazích. Alicka začíná. Jeden tah spočívá v určení orientaci libovolné hrany, která dosud nemá určenou orientaci. Jolča vyhraje, pokud se v jakémkoliv okamžiku vytvoří orientovaný cyklus. Má Jolča vítěznou strategii?

Řešení. Odpověď je nie; Alicka môže Jolči zabrániť vytvoriť cyklus.

Predpokladajme, že Alickin prvý ťah je na nejakej horizontálnej hrane e . Potom rozdelíme všetky hrany okrem e do L -iek, ako je znázornené na obrázku (kde e je zelenou označená). Potom, zakaždým, keď Jolča určí orientáciu jednej hrany z L -ka, Alicka učí orientáciu tej druhej tak, aby buď obe alebo žiadna z nich smerovali do stredu L -ka. Tvrdíme, že táto stratégia funguje, nakoľko žiadny orientovaný cyklus nemôže obsahovať takto zorientované L -ko, a je jednoduché si rozmyslieť, že tým zabránime aj ich vzniku.



(Jakub Krivošík)

Úloha G1. V tetivovom čtyrhúhelníku $ABCD$ je bod E průsečník úhlopříček. Dále označme střed strany AB jako F a paty kolmic z bodu E na přímky DA , AB a BC označme postupně P , Q a R . Dokažte, že body P , Q , R a F leží na jedné kružnici.

Řešení. (Podľa Erika Ježka) Dokážeme, že bod F je antišvrk v trojuholníku PQR a tým bude úloha vyriešená. Začneme tým, že dokážeme, že QE je os uhla PQR .

Štvoruholníky $PAQE$ a $QBRE$ sú tetivové (pravé uhly).

$$\angle EQP = \angle EAP = \angle DAC = \angle CBD = \angle RBE = \angle RQE.$$

Takže QE je vnútorná os a pretože $EQ \perp FQ$, tak FQ je vonkajšia os. Zostáva ukázať, že na osi PR leží F .

Dokreslíme si G ako stred CD a H ako preklopené E cez BC . Potom vidíme, že trojuholníky CHB a CEB sú zhodné a takisto zjavne sú trojuholníky DEA a CEB podobné. Takže aj DEA a CHB sú podobné.

Všimnime si, že G je stred CD , R je stred EH , F je stred AB , takže z klzania(str.26) máme, že trojuholník DEA je podobný s GRF . Analogicky máme tú istú podobnosť s GPF a majú spoločnú stranu GF , takže GPF je zhodný s GRF . Z čoho hneď máme $|FP| = |FR|$, takže F leží na osi PR a je teda antišvrk.

(Lucka Chladná)

Úloha N1. Je dán polynom P s nezápornými celočíselnými koeficienty a nekonečná posloupnost kladných celých čísel $a_1, a_2, \dots$ splňující $a_1 = 1$ a následně

$$a_{n+1}^2 + P(n) = a_{n+2}a_n$$

pro každé kladné celé číslo n . Dokažte, že P musí být konstantní.

Řešení. Pre spor predpokladajme, že P je nekonštantný, a teda $P(n) > 0$ pre všetky prirodzené n . Označme $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r_n$. Predelením rovnosti zo zadania kladným číslom $a_n a_{n+1}$ dostávame $r_n + \frac{P(n)}{a_n a_{n+1}} = r_{n+1} > r_n$, teda $\{r_n\}$ je rastúca. Vieme, že $r_1 = a_2 \geq 1$. Preto $r_2 > r_1 \geq 1$, a teda z rastúcosti platí $r_n \geq r_2 > 1$ pre všetky $n \geq 2$. Zvolme teraz dostatočne malé kladné

reálne číslo α tak, aby $a_2 \geq \alpha r_2^2$. Potom z indukcie ($a_{n+1} = r_n \cdot a_n \geq r_2 \cdot \alpha r_2^n = \alpha r_2^{n+1}$) dostávame, že $a_n \geq \alpha r_2^n$ pre všetky $n \geq 2$. Preto $\{a_n\}$ rastie exponenciálne.

Pre $n \geq 3$ zo vzťahu zo zadania máme

$$a_{n-1}^2 + P(n-2) = a_n a_{n-2},$$

$$a_{n+1}^2 + P(n) = a_{n+2} a_n,$$

$$a_n^2 + P(n-1) = a_{n+1} a_{n-1},$$

odkiaľ plynie postupne

$$a_n \mid a_{n-1}^2 + P(n-2),$$

$$a_n \mid a_{n+1}^2 + P(n),$$

$$a_n \mid a_{n+1} a_{n-1} - P(n-1) \mid a_{n+1}^2 a_{n-1}^2 - P(n-1)^2.$$

Preto použitím prvých dvoch deliteľností v tretej dostávame

$$P(n-1)^2 \equiv a_{n+1}^2 a_{n-1}^2 \equiv (-P(n)) \cdot (-P(n-2)) = P(n)P(n-2) \pmod{a_n},$$

a teda

$$a_n \mid P(n-1)^2 - P(n)P(n-2). \quad (3)$$

Keďže $\{a_n\}$ rastie exponenciálne, tak od nejakého momentu platí $a_n > |P(n-1)^2 - P(n)P(n-2)|$ (exponenciála eventuálne prerastie polynóm), a teda aby platila deliteľnosť (3) tak musí od nejakého momentu pre všetky n platiť $P(n-1)^2 = P(n)P(n-2)$. Keďže táto rovnosť platí pre nekonečne veľa hodnôt, tak pravá a ľavá strana sa musia identicky rovnať ako polynómy, teda $P(x-1)^2 \equiv P(x)P(x-2)$. Na koľko P je nekonštantný, tak existuje $\omega \in \mathbb{C}$ také, že $P(\omega) = 0$. Dosadením tejto ω za x do predošlej rovnice dostávame $P(\omega-1)^2 = 0$, a teda aj $\omega-1$ je koreň polynómu P . Preto indukciou $\omega-k$ je koreň pre všetky prirodzené k , a teda P má nekonečne veľa koreňov, a teda $P \equiv 0$, spor.

Poznámky opravujúciho. Hlavná myšlienka bola odhadnúť $\{a_n\}$ z dola nejakou exponenciálnou funkciou, a z hora polynomicke pomocou deliteľností. Po dosiahnutí $P(x-1)^2 \equiv P(x)P(x-2)$ sa dalo postupovať rôzne – rovnica nám napríklad hovorí, že keď argument polynómu P zväčšíme o 1, tak funkčná hodnota sa zväčší c -krát (kde $c = \frac{P(2)}{P(1)}$). Teda indukciou $P(n) = c^{n-1}P(1)$, odkiaľ z poznatkov o raste polynómov plynie $c = 1$, a teda P je konštantný (v nekonečne veľa bodoch nadobúda hodnotu $P(1)$).
(Dominik Rigasz)