# TR *i*KS ko

**Úloha 1.** *Miško chce uspořádat všechna kladná celá čísla od* $1$ *do* $2024$ *do kruhu tak, aby bylo každé číslo použito právě jednou a pro libovolné tři po sobě jdoucí čísla* $a, b, c$ *bylo číslo* $a + c$ *dělitelné číslem* $b + 1$. *Může to udělat?*

*Řešení.* Miško to nemůže udělat, dvě lichá čísla nemohou být po sobě jdoucí z paritních důvodů (jinak by všechna čísla byla lichá), proto jediná možnost zůstává, když lichá a sudá čísla se střídají, ale pak pro $b = 2024$ máme, že nejaké $a + c$ by mělo být dělitelné číslem 2025, ale podle výše uvedených argumentů je také sudé, takže je alespoň $2 \cdot 2025 = 4050$, což je nemožné, protože jak $a$, tak $c$ jsou menší než 2025. $\square$

**Úloha 2.** *Nechť* $p$ *je prvočíslo. Rozhodněte, zda v čtvercové síti o rozměrech* $p \times p$ *vrcholů lze zvolit* $p$ *vrcholů tak, že žádné tři neleží na přímce.*

*Řešení.* Áno. Voľ body so súradnicami $x$ a $x^2$ modulo $p$ pre $x$ od $0$ po $p - 1$, to že tieto body vyhovujú prenechávame ako cvičenie pre čitateľa. $\square$

**Úloha 3.** *Nechť* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *jsou kladná reálná čísla pro* $n \geq 2$. *Pro permutaci* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *posloupnosti* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *definujeme její skóre jako*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i^2}{b_{i+1}}.$$

*Ukažte, že některé dvě permutace posloupnosti* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *mají skóre, které se liší aspoň o* $3|a_1 - a_n|$.

*Řešení.* Pre $0 < y \leq x$ platí, že $\frac{y^2}{x} - \frac{x^2}{y} \geq 3(y - x)$. BUNV nech $a_1 \leq \cdots \leq a_n$.Vezmime si permutácie $(a_1, \ldots, a_n)$ a $(a_n, \ldots, a_1)$ a aplikujeme naše pozorovanie na ich skóre, čo nám dá dokazované tvrdenie. $\square$

**Úloha 4.** *Rovnoramenný trojúhelník* $\triangle ABC$, *splňující* $AB = AC$, *je vepsán do kružnice* $\omega$. *Nechť* $P$ *je libovolný bod na oblouku* $\widehat{BC}$, *který neobsahuje* $A$, *a nechť* $I_B$ *a* $I_C$ *označují vepsiště trojúhelníků* $\triangle ABP$ *a* $\triangle ACP$. *Dokažte, že při libovolné volbě bodu* $P$ *prochází kružnice opsaná trojúhelníku* $\triangle PI_BI_C$ *pevným bodem.*

*Řešení.* Hľadaný bod je stred oblúka $\widehat{BC}$ $S_a$. Označme zvyšné 2 $S_b$ a $S_c$. Zo symetrie $S_aS_b = S_aS_c$ a z vety o troch prstoch a symetrie $S_bI_b = S_bA = S_cA = S_cI_c$. Už nám len stačí, že $\angle I_bS_bS_a = \angle I_cS_cS_a$ z obvodových uhlov k oblúku $S_aP$ ($P, I_b, S_b$ sú kolineárne, lebo $PI_b$ je os uhla $APB$). Z toho podľa vety sus plynie $\triangle I_bS_bS_a \cong \triangle I_cS_cS_a$. Z čoho už plynie dokazované tvrdenie $\square$

**Úloha 5.** *Je dán kompletní graf na* 2024 *vrcholech, ve kterém má každá hrana váhu* 1 *nebo* 2*. Pokud má každý cyklus sudou celkovou váhu, najděte minimální hodnotu součtu všech vah v grafu.*

*Řešení.* Chceme maximalizovať počet hrán s 1. Tie netvoria trojuholník. Z Turánovej vety je ich najviac $1012^2$. Zrejme ak jednotkové hrany tvoria $K_{1012,1012}$ a zvyšné hrany sú dvojkové tak tento graf spĺňa zadané podmienky. Celkovú hodnotu súčtu si už zráta čitateľ ako cvičenie. $\square$