# Řešení 5. série

**Úloha A5.** *Dokažte, že pro libovolná kladná celá čísla $m$, $n$ platí*

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

*Řešení.* V nerovnosti sa vyskytuje $n$-tá a $m$-tá odmocnina, preto je dobré sa zamyslieť, z akej známej nerovnosti by sme vedeli dostať $n$-tú a $m$-tú odmocninu. Tu sa ponúka AG-nerovnosť, avšak v tej pod $n$-tou odmocninou musí byť súčin $n$ čísel. V našej úlohe máme pod odmocninou iba jedno číslo. To sa dá jednoducho opraviť tak, že do súčinu pridáme niečo, čo po prinásobení súčin nezmení. Takúto vlastnosť má skupina $n-1$ jednotiek.

Začneme teda s AG-nerovnosťou

$$\frac{m + (n-1)\cdot 1}{n} \geq \sqrt[n]{m \cdot 1^{n-1}}$$

a vezmeme prevrátenú hodnotu oboch strán, aby sme dostali odmocninu do menovateľa (obe strany sú kladné, prevrátením hodnôt sa nerovnosť zmení na opačnú):

$$\frac{n}{m+n-1} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{m}},$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} \geq \frac{n}{m+n-1}.$$

Analogickým postupom s vymenenými $m$ a $n$ dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n}} \geq \frac{m}{n+m-1}.$$

Teraz už stačí sčítať tieto nerovnosti a máme hotovo:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} \geq \frac{n}{m+n-1} + \frac{m}{n+m-1} = \frac{m+n}{m+n-1} > 1,$$

pretože čitateľ je väčší ako menovateľ a oba sú kladné ($m+n > m+n-1 \geq 1+1-1 = 1$). Nerovnosť je týmto dokázaná.

*Poznámky opravujúciho.* Veľa riešiteľov postupovalo ako vo vzoráku. Objavilo sa aj nemálo riešení využívajúcich derivácie či iné nástroje matematickej analýzy, ale viaceré z nich obsahovali chyby či nedostatky. Úloha sa pritom dala vyriešiť pomerne jednoducho trochu trikovým použitím AG-nerovnosti. *(Michal Staník)*

**Úloha G5.** *V rovině leží dva pravidelné (ne nutně shodné) $2n$-úhelníky, jejichž průnikem je $4n$-úhelník $P_1P_2\dots P_{4n}$. Dokažte, že uvážíme-li každou druhou jeho úhlopříčku, tedy*

$$P_1P_{2n+1}, \quad P_3P_{2n+3}, \quad \dots, \quad P_{2n-1}P_{4n-1},$$

*pak všech $n$ těchto úhlopříček prochází jedním bodem.*

*Řešení.* Označme vrcholy zadaných shodných $2n$-úhelníků $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ a $B_1, B_2, \ldots, B_{2n}$. Indexy $A_i$ a $B_i$ budeme brát modulo $2n$[1] a indexy $P_i$ modulo $4n$.

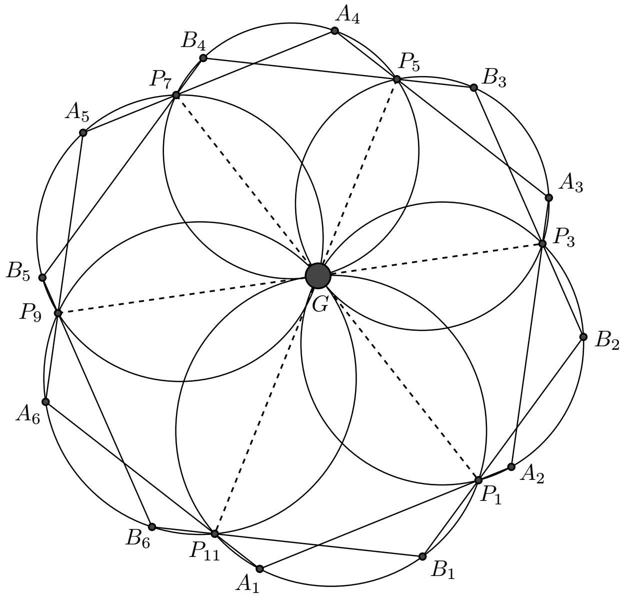
Nechť $P_{2i-1} = A_iA_{i+1} \cap B_iB_{i+1}$ a $P_{2i} = A_{i+1}A_{i+2} \cap B_iB_{i+1}$.

Označme $G$ střed spirální podobnosti zobrazující $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ na $B_1B_2 \ldots B_{2n}$. Tato spirální podobnost zobrazuje $A_iA_{i+1}$ na $B_iB_{i+1}$. Tedy její střed můžeme nalézt jako druhý průsečík kružnic opsaných $(A_iB_iP_{2i-1})$ a $(A_{i+1}B_{i+1}P_{2i-1})$. Protože $2n$-úhelníky jsou shodné, tak mají stejné velikosti úhlů, tedy $A_iB_iP_{2i-1}P_{2i-3}$ leží na jedné kružnici s bodem $G$.

Z pravidelnosti $2n$-úhelníků je $|\sphericalangle P_{2i-3}A_iP_{2i-1}| = (2n-2) \cdot \frac{180^\circ}{2n}$, tedy

$$|\sphericalangle P_{2i-3}GP_{2i-1}| = 180^\circ - (2n-2) \cdot \frac{180^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}.$$

Tedy když se podíváme na $2n$ polopřímek $GP_{2i-1}$, tak sousední dvě svírají úhel $\frac{180^\circ}{n}$. Tedy body $P_{2i-1}$ a $P_{2n+2i-1}$ leží na přímce s $G$. Takže každá druhá úhlopříčka prochází bodem $G$, tedy prochází všechny jedním bodem.




*Poznámky opravujícího.* Většina řešení řešila úlohu vzorově, objevilo se však i pár více počítacích řešení. *(Radek Olšák)*

**Úloha N5.** *Najděte všechny dvojice kladných celých čísel $x$, $y$, pro něž je*

$$(x+y)(xy+1)$$

*mocninou dvojky.*

[1] indexy nezačínají na 0, tedy formálně se nejedná o modulo $2n$, ale o modulo $2n$ kde $0 = 2n$.

*Řešení.* Nejprve uvažme případy, kdy je jedno z $x$, $y$ rovno jedné, BÚNO $y = 1$. Pak má $(x+1)^2$ být mocninou dvojky, tedy i $x + 1$ je mocnina dvojky. Přitom $x + 1 \geq 2$, takže $x = 2^k - 1$, kde $k$ je přirozené. Tím dostáváme řešení $(2^k - 1, 1)$ a $(1, 2^k - 1)$.

Nadále budeme předpokládat $x, y > 1$. Potom platí nerovnost $(x - 1)(y - 1) > 0$, což po roznásobení dá $xy + 1 > x + y$. Můžeme tedy brát $x + y = 2^a$, $xy + 1 = 2^b$ s nerovností $b > a$. Navíc je $x + y > 1 + 1$, takže $a \geq 2$. S tímto vyjádříme

$$(x - 1)(y - 1) = xy + 1 - x - y = 2^b - 2^a = 2^a(2^{b-a} - 1), \tag{1}$$

$$(x - 1) + (y - 1) = x + y - 2 = 2(2^{a-1} - 1). \tag{2}$$

Z nerovností $b > a \geq 2$ jsou obě $2^{b-a} - 1$ i $2^{a-1} - 1$ lichá čísla. Navíc $xy + 1$ je sudé, takže $x$ i $y$ jsou určitě lichá. Vzetím 2-valuací tak z (2) máme

$$1 = v_2((x - 1) + (y - 1)) \geq \min\{v_2(x - 1), v_2(y - 1)\} \geq \min\{1, 1\} = 1.$$

Jedno z $v_2(x - 1)$, $v_2(y - 1)$ tak musí být rovno 1, BÚNO nechť $v_2(y - 1) = 1$.

Z (1) pak máme $v_2(x - 1) + v_2(y - 1) = a$, takže $v_2(x - 1) = a - 1$. Zjevně $x - 1 < x + y$ a zároveň $2^{a-1} \mid x - 1$. Takže $x - 1$ je kladný násobek $2^{a-1}$ menší než $2 \cdot 2^{a-1}$, takže nutně $x - 1 = 2^{a-1}$. Díky $x + y = 2^a$ pak dopočítáme

$$(x, y) = (2^{a-1} + 1, 2^{a-1} - 1),$$

což zkouškou snadno ověříme jako validní řešení. Bylo přitom $a \geq 2$, takže s $k = a - 1$ lze toto řešení přepsat jako $(x, y) = (2^k + 1, 2^k - 1)$ pro přirozená $k$.

*Poznámky opravujícího.* Většina řešení postupovala správným směrem zhruba ekvivalentním se vzorákem – společnou myšlenkou vždy bylo omezení nějakého společného dělitele a úvahy o 2-valuaci. Tytéž myšlenky šlo také formulovat pomocí rozkladu multiplikativní grupy $\mathbb{Z}^*_{2^k}$ na direktní součin cyklických grup $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{k-2}}$.

Vyskytla se též mlhová řešení, která jenom po hromadě substituční kamufláže implicitně prohlásila nějakou vesměs ekvivalentní formu úlohy za zjevnou. Taková typicky obdržela jeden bod za správně tipnutá řešení. *(Matěj Doležálek)*

**Úloha C5.** *Každý správný org iKSka nosí tradiční iKSkový klobouk, který je buď zelený, oranžový nebo fialový. O skupince orgů řekneme, že je vyvážená, pokud jsou na jejich hlavách zastoupeny všechny tři barvy klobouků rovným počtem. Na výběrovce úloh páté série se sešlo $3n$ orgů, přičemž $n$ jich přišlo v zeleném, $n$ v oranžovém a $n$ ve fialovém klobouku. Rozesadili se kolem kulatého stolu, přičemž se shodou okolností přihodilo, že počet (neuspořádaných) dvojic orgů, kteří sedí vedle sebe a na hlavách mají klobouky různé barvy, byl sudý. Dokažte, že šlo rozříznout stůl jedním rovným řezem na dva kusy tak, aby u každého kusu zbyly vyvážené skupinky orgů.*

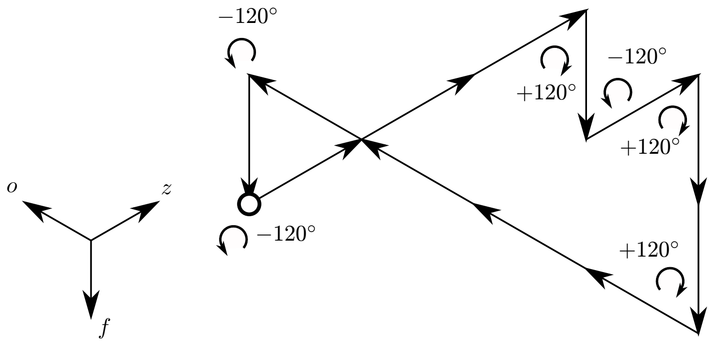
*Řešení.* Uvažme tři jednotkové vektory v rovině $z$, $o$, $f$ svírající mezi sebou úhly $120°$. Budeme procházet od jednoho orga kolem stolu a budeme si na papír kreslit křivku začínající v počátku. Když uvidíme orga se zeleným kloboukem, posuneme tužku na papíře o vektor $z$, pokud orga s oranžovým, tak o vektor $o$ a pokud orga s fialovým, tak o vektor $f$.

*Lemma Loop.* Na papíře jsme nakreslili křivku, co se vrátila do počátku, právě tehdy, když dosud prošlá množina orgů byla *vyvážená*.

*Důkaz.* Všimneme si, že $z + o + f = 0$. Takže pokud jsme prošli vyváženou množinou, je součet příslušných vektorů opravdu nula, tedy se křivka vrátila. Nyní si zafixujeme BÚNO $z$ vodorovně. Pak aby se křivka vrátila, musíme mít nulový součet $y$-ové souřadnice, tedy počet $f$ a $o$ musí být stejný. Analogicky se musí rovnat i počty $o$ a $z$, čímž je lemma dokázáno.

Stačí tedy ukázat, že křivka, kterou jsme nakreslili, se někdy protnula. V daném místě ji pak můžeme rozdělit na dvě souvislé křivky s nulovým součtem.

Všimneme si, že různá barva sousedních klobouků odpovídá tomu, že křivka změnila směr. Tedy víme, že naše uzavřená křivka změnila směr suděkrát. Ale kdykoli změníme směr, tak ho změníme o $\pm 120°$. Pokud se křivka neprotíná, tak po obtočení jednou dokola jsme změnili směr o $360°$. Ale $360°$ je lichý násobek $120°$, tedy se křivka musela někde protnout.




*Poznámky opravujícího.* Všechna správná řešení řešila úlohu vzorově. Jednalo se o netriviální úlohu, kde bylo třeba přijít na dobrý trik jak uchopit sudost počtu změn barev.

*(Radek Olšák)*