Zadanie 2. série

Termín odoslania: 26. jún 2023

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha G2. Je daný trojuholník ABC so stredom kružnice vpísanej I. Osi vonkajších uhlov pri vrcholoch B a C pretnú rovnobežku s BC vedenú bodom A postupne v bodoch P a Q. Nech R je priesečník kolmice na BP vedenej bodom P a kolmice na CQ vedenej bodom Q. Dokážte, že platí $|AI| = |AR|$.

Úloha C2. Pre graf G označme $\mathcal{C}(G)$ množinu jeho cyklov. Pre každé $n \geq 6$ určite všetky možné hodnoty[1]

$$\gcd_{C \in \mathcal{C}(G)} |C|,$$

kde G je graf o n vrcholoch, ktorého všetky vrcholy majú stupeň aspoň 3.

Úloha A2. Je dané prirodzené číslo n a reálne čísla $x_1, \ldots, x_n$ splňujúce $|x_1| + \cdots + |x_n| = 1$. V závislosti na n nájdite minimum výrazu

$$|-x_1| + |x_1 - x_2| + |x_1 + x_2 - x_3| + \cdots + |x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n|.$$

Úloha N2. Je daný nekonštantný polynóm f s celočíselnými koeficientami taký, že $f(1) \neq 1$. Pre prirodzené číslo n, budeme symbolom $D(n)$ značiť množinu jeho kladných delitelov. Prirodzené číslo m nazveme f-*pekné*, pokiaľ existuje nejaké prirodzené n, pre ktoré nastáva rovnosť množín[2]

$$f(D(m)) = D(n).$$

Dokážte, že existuje iba konečne veľa f-pekných prirodzených čísel.

[1] Cyklom rozumieme postupnosť po dvoch rôznych vrcholov $v_1, \ldots, v_k$ takých, že vedie hrana medzi vrcholmi v_i a v_{i+1} a medzi vrcholmi v_1 a v_k. Počet vrcholov cyklu C značíme $|C|$.

[2] Výrazom $f(D(m))$ tu jednoducho myslíme množinu všetkých hodnôt $f(d)$ pre $d \in D(m)$.