Riešenia 4. série

Úloha N4. *Žirafa si lámala hlavu nad postupnosťou $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kladných celých čísel, ktorá spĺňa $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$ pre všetky kladné celé čísla n. Tak dlho si nad ňou lámala hlavu, až ju mala tak polámanú, že jej musel Michal vytočením čísla 155 zavolať záchranku. Dokážte, že číslo $a_{155} - 155$ je zložené.*

Riešenie.

Pozrime sa na zadanú postupnosť modulo a_{148}. Jednoduchými výpočtami, pozostávajúcich postupným dosadením hodnôt od a_{148} po a_{154} modulo a_{148} do rekurentného vzťahu, sa dopočítame,že

$$a_{155} - 155 \equiv 0 (\text{mod } a_{148}).$$

Teraz už len ukážeme,že $a_{155} - 155 > a_{148} > 1$. Keďže postupnosť je očividne rastúca pre $i \geq 3$,lebo $a_{i+1} = a_i a_{i-1} + 1 > a_i$ z čoho vyplýva, že $a_i \geq i - 1$ pre $i \geq 3$.Využitím zopár odhadov máme

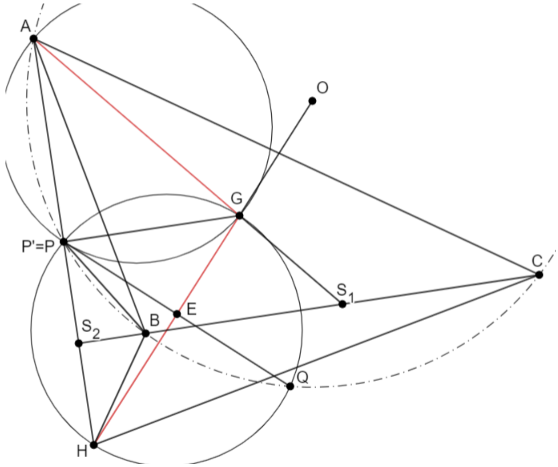
$$a_{155} - 155 > a_{150} - 155 > a_{148}a_{148} + 1 - 155 > 3a_{148} - 154 > a_{148} + 2 \cdot 147 - 155 > a_{148},$$

čím sme hotoví.

Poznámky opravovateľa. Všetky riešenia postupovali ako vzorové. Body som strhával za chýbajúce zdôvodnenie, že $a_{155} - 155 > a_{148}$ *(Adam„Džavo“Džavoronok)*

Úloha G4. *Daný je trojuholník ABC s tupým uhlom pri vrchole B. Označme G a H postupne ťažisko a ortocentrum tohoto trojuholníka. Následne nech kružnica ω s priemerom AG pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode P. Dotyčnica k ω v bode P pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode Q. Dokážte, že ak platí $|AG| = |GH|$, potom $|\measuredangle HQG| = 90°$.*

Riešenie. Najprv dokážme, že bod P je stredom úsečky AH. Označme bod P' stred úsečky AH. Z $|AG| = |GH|$ vyplýva, že $\triangle AHG$ je rovnoramenný so základňou AH, preto P' je potom ako stred základne zároveň pätou výšky z bodu G $\implies |\measuredangle GP'A| = 90°$. Vďaka Thalesovej vete bod P' leží na kružnici nad priemerom AG (ω). Vďaka deliacemu pomeru ťažiska voči ťažnici a tomu, že P je stred AH, platí, že body G, P' sa v rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom $k = 3/2$ postupne zobrazia na stred CB (označme S_1) a stred $P'H$ (označme S_2). Vieme, že $GP' \perp P'H$. Vďaka rovnoľahlosti je priamka $S1S2$ tiež kolmá na $P'H$ a navyše prechádza jej stredom, teda tvorí os $P'H$. Vieme, že aj $BC \perp P'H$ a leží na nej bod S_1, z toho vyplýva, že body ABS_1S_2 ležia na jednej priamke a tvoria os $P'H$. Bod B leží na osi $P'H$, teda $\triangle P'BH$ je rovnoramenný so základňou $P'H$. Teraz platí $|\measuredangle ACB| = 90° - |\measuredangle CAH| = |\measuredangle BHA| = |\measuredangle BHP'| = |\measuredangle BP'H| = 180° - |\measuredangle AP'B|$. Z vety o obvodových uhloch vyplýva, že P' leží aj na kružnici (ABC), konkrétne v opačnom poloblúku AB od toho, v ktorom leží bod C. Keďže bod P' leží na kružnici ω a na kružnici (ABC) dostávame, že je totožný s bodom P. (Odteraz označujme P) Keďže $\triangle AHG$ je rovnoramenný, platí $|\measuredangle GAH| = |\measuredangle AHG|$. Taktiež vieme, že priamka PQ je dotyčnicou k ω v $P \implies |\measuredangle GPQ| = |\measuredangle GAP|$. Označme E priesečník priamok GH a PQ. Vieme, že $|\measuredangle EGP| = |\measuredangle HGP|$ a $|\measuredangle PHG| = |\measuredangle PAG| = |\measuredangle GPQ| = |\measuredangle GPE|$. Preto $\triangle GEP$, $\triangle GPH$ sú podobné podľa vety uu. Teda $|\measuredangle PEG| = |\measuredangle APG| = 90° \implies PQ \perp GH$. Priamka GH je Eulerova priamka $\triangle ABC$, pre ktorú je známe, že platí $O \in GH$. Keďže body OGH ležia na priamke kolmej na PQ a $\triangle POQ$ je rovnoramenný (OP a OQ sú polomery (ABC), priamka OGH je osou úsečky PQ. Odtiaľ vyplýva, že $\triangle PGQ$ je rovnoramenný, čiže $|\measuredangle GQP| = |\measuredangle GPQ| = |\measuredangle GHP| \implies$ $(GPHQ)$ ležia na kružnici. Odtiaľ $|\measuredangle HQG| = 180° - |\measuredangle HPG| = 90°$ čo sme chceli dokázať.



Poznámky opravovateľa. Väčšina riešení bola správnych, viacero riešení používalo $|HG| = 2|GO|$, čo je ďalšia známa vlastnosť Eulorovej priamky. Jediná chyba ktorá sa v riešeniach vyskytla, bolo predpokladanie $P \in AH$ bez uvedenia dôkazu. *(Roland Vízner)*

Úloha A4. *Majme konečnú postupnosť $a_1, a_2, \dots, a_m$ kladných celých čísel. Dokážte, že existujú nezáporné celé čísla x, y, a N také, že rovnosť*

$$\left\lfloor \sum_{i=1}^{m} \sqrt{n+a_i} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{nx+y} \right\rfloor$$

platí pre všetky $n > N$.

Riešenie. Ak sa všetky hodnoty a_i rovnajú potom $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{n+a_i} = \sqrt{m^2 n + m^2 a_1}$, čiže $(x, y) = (m^2, m^2 a_1)$ zrejme fungujú. Ak nie sú všetky rovnaké tvrdíme, že $x = m^2$ a $y = mS - 1$ vyhovujú, kde $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$. Ukážeme si horné ohraničenie pomocou Jensenovej nerovnosti na konkávnu odmocninu:

$$\sum_{i=1}^{m} \sqrt{n+a_i} < m\sqrt{n + \frac{S}{m}} = \sqrt{xn+y+1} \leq \left\lfloor \sqrt{xn+y} \right\rfloor + 1.$$

Teraz nám už len stačí ukázať, že $\sum_{i=1}^{m} \sqrt{n+a_i} \geq \lfloor \sqrt{xn+y} \rfloor$. Vezmime si $k < \frac{1}{2}$. Následne tvrdím, že pre každé k existuje N, že pre všetky $n > N$ platí

$$\sqrt{n+a_i} \geq \sqrt{n} + \frac{k a_i}{\sqrt{n}}.$$

Dokázať to vieme jednoduchým umocnením a úpravou, po ktorej dostaneme $a_i \geq 2k \cdot a_i + \frac{k^2 a_i^2}{n}$, čo zrejme asymptoticky platí platí pre dostatočne veľké n. Voľme $k = \frac{y}{2(y+1)}$. Následne

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{n+a_i} \geq m\sqrt{n} + \frac{kS}{\sqrt{n}} = m\sqrt{n} + \frac{mS-1}{2m\sqrt{n}} \geq \sqrt{xn+y}.$$

Čím sme hotoví podľa Bernoulliho nerovnosti (pre $r = \frac{1}{2}$)alebo to vieme umocniť a jednoducho upraviť.

Poznámky opravovateľa. Správna voľba x, y bola kľúčová. x sa dalo uhádnuť z asymptotiky ale na y bolo potrebné mať cit a nejaký insight, keďže bolo jasné z Jensena a podobných nerovností, že to je niečo okolo mS ale to samotné nejak nefunguje napr

$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+2} \rfloor \neq \lfloor \sqrt{4n+4} \rfloor \qquad n \in \{t^2 - 1 \mid t = 2, 3, \dots\}.$$

Následne môže sa zdať náhodné to ad-hoc lemma s využitím $k < \frac{1}{2}$ ale to tiež vyžadovalo nejaký nadhľad a skúmanie (častokrát cez Taylorov rozvoj a iné analytické metódy) a následne jeho konkrétna voľba už bola taká, aby to nejak pekne vyšlo. Veľa riešení využilo aj iné pekné odhady a metódy. *(Adam „Džavo“ Džavoronok)*

Úloha C4. *Džavo našiel v rovine n rôznych bodov. Rozhodol sa, že pôjde merať vzdialenosti medzi nimi. Mal však po ruke iba logaritmické pravítko, preto pre každú dvojicu bodov odmeral ich vzdialenosť ℓ a následne si do zošítku zapísal $\lfloor \log_2 \ell \rfloor$. Dokážte, že po skončení nemal v zošítku viac ako $2n-2$ rôznych hodnôt.*

Riešenie. Označme M množinu všetkých párnych čísel, ktoré si Džavo napísal do zošítku.

Uvažujme graf G, ktorého vrcholmi bude našich n bodov v rovine. Pre každé párne číslo $2k \in M$ zvolíme jednu dvojicu bodov A a B tak, že $\lfloor \log_2 |AB| \rfloor = 2k$ a pridáme do grafu G hranu AB. Graf G má teda toľko hrán, koľko rôznych párnych čísel má Džavo zapísaných v zošítku.

Pod dĺžkou hrany grafu G budeme rozumieť vzdialenosť jej koncových vrcholov v rovine.

Predpokladajme pre spor, že graf G obsahuje cyklus. Označme $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ dĺžky hrán tohto cyklu, pričom $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_m$ (hrany cyklu nemusia ležať v cykle v tomto poradí). Ďalej nech pre každé i je $2k_i = \lfloor \log_2 \ell_i \rfloor$. Platí $2k_1 < 2k_2 < \dots < 2k_m$ (tieto nerovnosti sú ostré, lebo pre každé číslo $2k \in M$ je v grafe G práve jedna hrana s dĺžkou ℓ spĺňajúcou $2k = \lfloor \log_2 \ell \rfloor$). Potom

$$\begin{aligned} \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{m-1} &< 2^{2k_1+1} + 2^{2k_2+1} + \dots + 2^{2k_{m-1}+1} \leq 2^{2k_{m-1}+1} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots \right) \\ &= 2^{2k_{m-1}+1} \cdot \frac{4}{3} < 2^{2k_{m-1}+2} \leq 2^{2k_m} \leq \ell_m. \end{aligned}$$

To je ale spor s n-uholníkovou nerovnosťou, a teda graf G naozaj neobsahuje cyklus.

Keďže graf G neobsahuje cyklus a má n vrcholov, tak má nanajvýš $n-1$ hrán. To znamená, že Džavo si do zošítku zapísal nanajvýš $n-1$ rôznych párnych čísel.

Analogicky môžeme dokázať, že si Džavo do zošítku zapísal nanajvýš $n-1$ rôznych nepárnych čísel.

Dokopy si teda do zošítku zapísal nanajvýš $(n-1) + (n-1) = 2n-2$ rôznych hodnôt, čo sme chceli dokázať.

(Matej Vasky)