Zadání 2. série

Termín odeslání: 22. října 2012

Adresa pro odeslání: *Korespondenční seminář iKS*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Česká republika

Úloha N2. Je dáno přirozené číslo d. Dokažte, že je možné najít takové kladné reálné číslo c, že pro všechna přirozená čísla $n > d$ platí nerovnost

$$[n-1, n-2, \ldots, n-d] > cn^d.$$

Hranatými závorkami značíme nejmenší společný násobek.

Úloha G2. Je dán trojúhelník ABC a dále mimo rovinu danou tímto trojúhelníkem bod S takový, že $|SA| = |SB| = |SC|$. Na úsečkách SA, SB, SC nalezneme postupně body X, Y, Z tak, aby rovina XYZ byla rovnoběžná s rovinou ABC. Buď O střed sféry opsané čtyřstěnu $SABZ$. Dokažte, že přímka SO je kolmá na rovinu XYC.

Úloha C2. Pepa s Mirkem hrají deskovou hru. Její součástí je hrací plán a jedna figurka. Na hracím plánu jsou políčka a některé dvojice políček jsou spojeny rourou (roury jsou obousměrné a mohou vést nad sebou a pod sebou)[1]. Na začátku hry položí Mirek figurku na jedno políčko a dále se hráči střídají v tazích. První posune figurku Pepa podél některé roury na další políčko, pak Mirek, … Figurku je zakázáno posunout na políčko, na kterém už někdy stála. Kdo nemůže táhnout, prohrál. Dokažte, že když je počet políček na hracím plánu lichý, tak má Mirek vyhrávající strategii.

Úloha A2. Dokažte, že pokud polynom p s reálnými koeficienty splňuje

$$p(x)^2 - 1 = p(x^2 + 1)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak to je konstantní polynom.

[1] V grafové terminologii jsou políčka vrcholy a roury hrany obecného grafu.