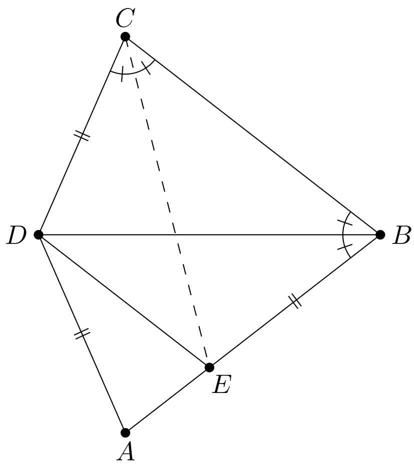
Riešenia 2. série

Úloha G2. *V rovine leží štvoruholník $ABCD$, v ktorom platí $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCD|$ a tiež $|DA| = |DC|$. Na strane AB je zvolený bod E tak, že $|BE| = |DA|$. Dokážte, že priamka CE je osou uhla $\sphericalangle BCD$.*

Riešenie. Jistě platí $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| > |\sphericalangle ABD|$, tedy $|DB| > |AD|$ a z věty Ssu máme $\triangle DAB \cong \triangle DCB$ (neboť $|DA| = |DC|$, $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle DCB|$ a BD je společná), a tedy $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle DBC|$.

Z sus také $\triangle BCE \cong \triangle CBD$, protože $|EB| = |DC|$, $|\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle BCD|$ a BC je společná. Z toho máme $|\sphericalangle BCE| = \sphericalangle CBD|$.



Máme tedy, že $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle DBC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BCD|$, jak jsme chtěli.

Poznámky opravovateľa. Z $|AD| = |DC|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle BCD|$ ještě neplyne $|AB| = |BC|$. Protipříkladem je třeba situace, kdy ACD je rovnoramenný trojúhelník se základnou AC a B leží kdekoliv na AC. Tento degenerovaný případ stál některá řešení jeden bod.

(Václav Janáček)

Úloha N2. *Je dané celé číslo a_1, z ktorého je ďalej definovaná nekonečná postupnosť celých čísel predpisom $a_{n+1} = a_n^2 - a_n - 1$ pre každé prirodzené n. Dokážte, že pre každé prirodzené n je a_{n+1} nesúdeliteľné s $2n + 1$.*

Riešenie. Ukážeme, že každý prvočíselný dělitel čísla a_{n+1} musí být větší než $2n + 1$. Z toho už speciálně vyplyne, že a_{n+1} je nesoudělné s $2n + 1$.

Uvažujme tedy nějaké $p \mid a_{n+1}$. Jelikož $a_n^2 - a_n$ je vždy sudé, všechna a_{n+1} jsou lichá, takže můžeme uvažovat $p > 2$. Označme $f(x) = x^2 - x - 1$ a dívejme se na posloupnost $\{a_i\}$ s rekurencí $a_{i+1} = f(a_i)$ pouze jako na zbytky mod p, tedy berme f jako funkci $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$. Všimněme si, že $f(0) = -1$, $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$.

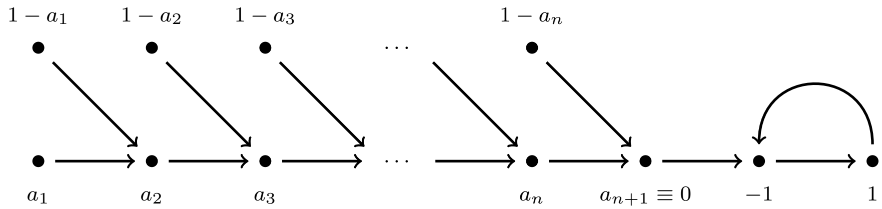
Funkci $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ si představíme jako orientovaný graf na množině vrcholů $\mathbb{Z}_p$: z každého vrcholu x nechť vede jediná šipka do $f(x)$. Pozorovali jsme, že 1 a -1 (díky $p > 2$ jsou to různé zbytky) tvoří dvojcyklus, navíc z 0 ukazuje šipka do tohoto cyklu. Z rekurence posloupnosti a $p \mid a_{n+1}$ plyne, že když začneme ve zbytku a_1 a uděláme n kroků po šipkách, dojdeme do 0.

Přitom ale 0 neleží uvnitř cyklu, takže v těchto n krocích nutně musíme projít $n+1$ různých vrcholů. Navíc ještě po 0 musí následovat dvojcyklus 1 a -1, což jsou vrcholy, které se dosud v cestě také nemohly objevit. To už ukazuje $p \geq n+3$. Tento odhad vylepšíme: rozmyslíme si, že do této cesty po šipkách z a_1 do $a_{n+1} \equiv 0$ se musí připojovat ještě spousta dalších šipek z dalších unikátních vrcholů, čímž odhad vylepšíme na $p > 2n+1$, jak chceme.

Funkce f je kvadratický polynom. Jakmile pro nějaká a, b platí $f(a) = b$, pak máme i

$$f(1-a) = (1-a)^2 - (1-a) - 1 = a^2 - a - 1 = f(a) = b.$$

Kdykoliv tedy na cestě z a_1 do a_{n+1} máme šipku vedoucí z a_i do a_{i+1}, vede zároveň do a_{i+1} ještě další šipka z $1-a_i$. Jediný případ, kdy by se jednalo o stejné zbytky (vrcholy), by byl $2a_i \equiv 1 \pmod{p}$, tedy $a_i \equiv 2^{-1} \pmod{p}$. To však může nastat nanejvýš jednou, takže v ostatních případech máme skutečně další šipku z $1-a_i$ do a_{i+1}. Vrchol $1-a_i$ jsme přitom nemohli mít už dříve na cestě z a_1 do a_i, neboť potom by se a_{i+1} vyskytlo dvakrát, což nelze. Celkově tedy v grafu máme následující situaci, přičemž v nanejvýš jednom vrcholu může šipka navíc z $1-a_i$ chybět.



Všechny vrcholy v obrázku jsou navzájem různé zbytky mod p, což nám dává odhad na p. Máme $n+1$ vrcholů $a_1, \ldots, a_{n+1}$, dále dva vrcholy ± 1 a alespoň $n-1$ vrcholů tvaru $1-a_i$ připojujících se do cesty dalšími šipkami, takže celkem dostáváme

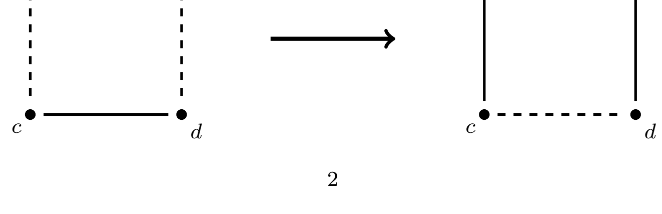
$$p \geq (n+1) + 2 + (n-1) = 2n+2 > 2n+1,$$

jak jsme chtěli.

Poznámky opravovateľa. Všechna správná řešení se ubírala podobným směrem jako to vzorové – počítala různé zbytky modulo p pro $p \mid a_{n+1}$. Řešením, která nezužitkovala zbytky $1-a_i$, a tudíž získala jen slabší odhady jako $p \geq n+3$, jsem uděloval pár částečných bodů.

(Matěj Doležálek)

Úloha C2. *Operáciou na grafe G rozumieme nasledujúci úkon: vezmeme štyri jeho vrcholy a, b, c, d také, že existujú hrany $\{a,b\}$, $\{c,d\}$, zatiaľ čo hrany $\{a,c\}$, $\{b,d\}$ neexistujú, a hrany $\{a,b\}$, $\{c,d\}$ zmažeme a naopak $\{a,c\}$, $\{b,d\}$ prikreslíme.*



Sú dané dva grafy G_1, G_2 na rovnakej množine vrcholov a v oboch platí, že každý vrchol má stupeň 100. Dokážte, že niekoľkými (konečne veľa) operáciami dokážeme G_1 previesť na G_2.

Riešenie. Definujme si nejaký monovariant, ktorý bude popisovať prevod jedného grafu na ďalší. Pre prehľadnosť značíme AHB, ak medzi bodmi A a B vedie hrana; ANB, ak nevedie. Operáciu zo zadania značme O(AHB;CHD) ($\rightarrow$ (AHC;BHD)), alebo ak nebude známa existencia hrán: $O(A;B;C;D)$

Každý bod A, ktorý si vyberieme, bude mať zoznam svojich priateľov, s ktorými ostane aj v grafe G_2 (teda také body $\{X\}$, že pre G_1: AHX a zároveň pre G_2: AHX); potom takých, ktorých si odstráni (teda také body $\{Y\}$, že pre G_1: AHY a zároveň pre G_2: ANY); potom takých, ktorí preňho vzniknú (teda také body $\{Z\}$, že pre G_1: ANZ a zároveň pre G_2: AHZ).

Zjavne množiny bodov $\{Y\}$ a $\{Z\}$ pre každý bod A sú rovnako veľké, inak by bod A zmenil svoj stupeň v grafe G_2. Vyberme si pre bod A nejaký bod z jeho množiny $\{Y\}$ nejaký bod B (ak neexistuje bod A s neprázdnou množinou $\{Y\}$, tak $G_2 = G_1$) a zmažme hranu medzi A a B (čiže AHB $\rightarrow$ ANB). To znamená, že pre bod B musí existovať jeho neprázdna množina $\{Z\}$, čiže vieme z nej vybrať nejaký bod C a spraviť BNC $\rightarrow$ BHC. Kvôli zachovaniu stupňa grafu vieme pokračovať po (alternujúcej) *ceste* (ako AHB $\rightarrow$ ANB; BNC $\rightarrow$ BHC; CHD $\rightarrow$ CND; ...) až kým neutovríme cyklus (keďže máme konečný počet vrcholov), teda nejaký I a J budú rovnaké vrcholy na tejto *ceste*.

Ak ukážeme, že iterácia v zadaní nám umožňuje invertovať spomenutým spôsobom akýkoľvek existujúci cyklus, tak by sme tým každému bodu v danom cykle znížiť veľkosti jeho množín $\{Y\}$ a $\{Z\}$ o 1, čo je monovariant, na ktorého konci sú všetky tieto množiny prázdne a my by sme vyhrali. Predefinujme si preto cyklus ako striedajúcu postupnosť zmien na daných susediacich hranách $H \rightarrow N$, $N \rightarrow H$, $H \rightarrow N$; a operáciu v cykle ako O, ktorá invertuje niektoré dve rovnaké hrany cyklu.

Lemma 1. *Cykly, ktorých každý bod má stupeň 1 (alebo 2 počítajúc aj „nehrany") (nazývajme ich jednoduché), dokážeme invertovať.*

Očíslujeme si body tak, ako idú za sebou v cykle (čísla sú iba mená bodov). Predpokladajme, že v ňom nevieme vykonať operáciu. Potom ju nie je možné vykonať ani pre $O(1H2n;\, 2H2n-1)$. Cyklus sme si tu $BUNV$ definovali tak, že $1H2n$; takže $1N2$, a tiež, $2n-1N2n$. Keďže nevieme spraviť O, tak nutne $2N2n-1$. Analogickou úvahou pre štvoricu $2; 3; 2n-2; 2n-1$; máme, že $3H2n-2$, indukčne teda vidno, že hrany $i+1?2n-i$ existujú práve ak i je nepárne (a $i=0$). To je však spor s paritou samotného cyklu, lebo hrana $n?n+1$ je z toho pohľadu rovnaká ako hrany $n+1?n+2$ a n-1 ? n, ktoré s ňou v cykle susedia.

Tým sme ukázali, že vieme v ľubovoľnom *jednoduchom* cykle vykonať operáciu, čiže pre nejaké i: O $(i+1?2n-i;\, iH2n-i+1)$, čím sa rozpadáva cyklus:

$$(1 \rightarrow i \rightarrow n \rightarrow n+1 \rightarrow 2n-i \rightarrow 2n-i+1 \rightarrow 2n \rightarrow 1)$$

na menšie dva:

$$(1 \rightarrow i \rightarrow 2n-i+1 \rightarrow 2n \rightarrow 1)$$

a

$$(i+1 \rightarrow n \rightarrow n+1 \rightarrow 2n-i \rightarrow i+1);$$

pričom niektorý druhý cyklus môže byť aj degenerovaný (teda tvaru A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ A), no to len znamená, že sa zvyšný cyklus zmenšil. Najmenší možný cyklus má 4 body, ten isto vieme zmeniť O a dokázali sme, že vieme vždy rozdeľovať väčšie cykly.

Lemma 2. *Slovom stopen rozumejme počet všetkých hrán a nehrán susediacich s daným vrcholom v uvažovanom cykle. Vždy vieme z tohto cyklu vybrať jeho podcyklus, v ktorom bude mať jeho vybraný vrchol A stopen nanajvýš 4.*

(Tu by sme Vám odporúčali si nakresliť obrázky)

Budeme prechádzať cez cyklus. Všimnime si, že ak je 100 nejakého bodu A väčší než 2, môžme sa v tomto bode rozhodnúť, ktorou ďalšou (ne)hranou (striedajúc hrany a nehrany) z neho odídeme. Z bodu A sme $BUNV$ vyšli existujúcou H. Ak sme nejakým prechádzaním cyklu do bodu A prišli druhýkrát, pričom posledný priechod viedol cez N, tak tento podcyklus má *stopen* $\mathrm{A} = 2 \leq 4$.

Ak nie, predpokladajme, že sme nejakým prechádzaním cyklu do bodu A prišli druhýkrát, no cez H , teda $(A \to A)$ sám o sebe nemôže byť cyklus (dve hrany tejto cesty majú rovnakú existenciu, H). Ak by každá N vedúca (*vedie* znamená, že existuje nejaká cesta striedajúca H a N, ktorá vnútri neobsahuje daný bod, teda A) z A viedla doň cez H, tak máme spor s tým, že počet H aj N susediacich s A je rovnaký. Teda vieme vybrať takú N, ktorá vedie do A opäť cez N, čím máme už legitímny cyklus $(A-\mathrm{H}-; \ldots -\mathrm{H}-A-\mathrm{N}-; \ldots ; -\mathrm{N}-A)$ a teda z predpokladu, že bod A musí mať v našom cykle *stopen* > 4, máme, že zároveň vieme oddeliť nejaký podcyklus, kde bude mať A *stopen* 4.

Pre spor predpokladajme, že máme nejaký cyklus, v ktorom nedokážeme vykonať O. Potom zrejme v ňom nájdeme podcyklus a bod A so stupňom (podľa predošlej úvahy) 4. Susediace body volajme: A_1, A_2, A_3, A_4, pričom v cykle sú AHA_1, AHA_2. Tento cyklus:

$$(A \to A_1 \to B_1 \to C_1 \ldots C_2 \to B_2 \to A_2 \to A \to A_3 \to B_3 \to C_3 \ldots C_4 \to B_4 \to A_4 \to A)$$

môžme bez zmeny existencie hrany rozdeliť na tieto tri cykly, u ktorých v nejakom poradí skúsime zložiť ich invertovania:

$$(A \to A_1 \to A_2 \to A \to A_3 \to A_4 \to A) \tag{1}$$

$$(A_1 \to A_2 \to B_2 \to C_2 \to \cdots \to C_1 \to B_1 \to A_1) \tag{2}$$

$$(A_3 \to A_4 \to B_4 \to C_4 \to \cdots \to C_3 \to B_3 \to A_3) \tag{3}$$

Zistíme, či existuje nejaká O, ktorú vieme vykonať, taká, že buď vytvorí niekoľko menších cyklov, alebo zníži súčet veľkostí množín $\{Y\}$. Obe tieto O sú monovariantné, takže z indukcie budeme vedieť invertovať aj celý cyklus.

(Snadno sa presvedčíme, že aj v týchto nových cykloch sa H a N budú striedať (až na $A_1?A_2$, $A_3?A_4$, a tiež, že tieto hrany po zložení cyklov ostanú s nezmenenou existenciou.) Pridali sme dve hrany, $A_1?A_2$, $A_3?A_4$ ktorých existenciu nepoznáme, a potenciálne môžu pokaziť vykonanie operácií v niektorých cykloch.

Najprv si všimneme prípad, že podcykly (2) a (3) by neboli hranovo disjunktné (existencia hrán $A_1?A_2$ a $A_3?A_4$ nemusí byť známa). Potom však oba podcykly obsahujú nejakú $K?L$, vďaka čomu môžme z ich častí vybrať podcyklus:

$$(A \to A_1 \to \cdots \to K \to L \to \cdots \to A_3 \to A)$$

alebo

$$(A \to A_1 \to \cdots \to K \to L \to \cdots \to A_4 \to A)$$

Zvoľme $BUNV$ prvú možnosť. Dá sa rozdeliť do dvoch cyklov:

Tým pádom vo vybranom cykle vieme nájsť priechodný (striedajúci H a N) podcyklus, kde bod A má *stopen* 2, tým sa posúvame do menšieho cyklu (indukcia môže pokračovať).

Teraz môžme predpokladať, že (2) a (3) budú hranovo disjunktné. Tu sa stačí zamyslieť nad možnosťami existencie hrán $A_1?A_2$ a $A_3?A_4$.

Ak súčasne A_1NA_2 a A_3HA_4, ponúka sa invertovať najskôr (1). To sa dá ľahko spraviť (prenechávame čitateľovi, odporúčame použiť pomocnú (ne)hranu $A_1?A_3$). Následne dokážeme v ľubovoľnom poradí prejsť cykly (2) a (3) (lebo hrany A_1HA_2 a A_3NA_4 majú teraz správnu existenciu, indukcia pokračuje.

Ak A_1HA_2 alebo resp. A_3NA_4, tak vieme vybrať podcyklus (2), resp. (3), indukcia pokračuje v jednom z nich.

Prípad, kedy už nie je možné sa presunúť do menšieho podcyklu a existuje bod A stupňa 4, je

$$(A \to A_1 \to A_2 \to A \to A_3 \to A_4 \to A)$$

čo je presne (1), ktorý vieme vykonať.

No a keďže sme dokázali, že vieme zvoliť také rozdelenie do cyklov, kde v každom cykle vieme buď vybrať menší podcyklus, alebo vhodnou O znížiť súčet veľkostí množín $\{Y\}$, skončili sme. *(Martin Andričík)*

Úloha A2. *Nech $\mathbb{R}[x]$ značí množinu polynómov s reálnymi koeficientmi. Nájdite všetky zobrazenia $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, ktoré spĺňajú nasledujúce podmienky:*

(i) Platí $\varphi(0) = 0$.

(ii) Pre každý nenulový polynóm $p \in \mathbb{R}[x]$ platí $\deg(\varphi(p)) \le 1 + \deg p$, kde $\deg$ značí stupeň polynómu.

(iii) Pre ľubovoľné reálne číslo s a ľubovoľné polynómy $p, q \in \mathbb{R}[x]$ platí $p(s) = (\varphi(q))(s)$ práve vtedy, keď $q(s) = (\varphi(p))(s)$. Slovne: polynómy p a $\varphi(q)$ nadobúdajú v (reálnom) bode s rovnakých hodnôt práve vtedy, keď q a $\varphi(p)$ nadobúdajú v s rovnakých hodnôt.

Riešenie. Ukážeme, že zadaniu vyhovujú práve zobrazenia $\varphi(p) = p$ a $\varphi(p) = -p$. Tieto dve zobrazenia zjavne spĺňajú podmieky (i) aj (ii). Pre $\varphi(p) = p$ sa podmienka (iii) zmení na $p(s) = q(s)$ práve vtedy, keď $q(s) = p(s)$, čo platí. Podobne pre $\varphi(p) = -p$ to bude $p(s) = -q(s)$ práve vtedy, keď $q(s) = -p(s)$, čo tiež platí. Dokázali sme tak, že spomínané dve zobrazenia naozaj vyhovujú, takže už len stačí ukázať, že žiadne ďalšie nie sú.

Najskôr do (iii) za q dosadíme nulový polynóm, čím s využitím (i) získame

$$p(s) = 0 \iff 0 = (\varphi(p))(s). \tag{4}$$

Polynómy p a $\varphi(p)$ tak majú rovnaké reálne korene (nie nutne s rovnakou násobnosťou).

Zápisom $[u, v]$ budeme označovať, keď za p dosadíme u a za q dosadíme v.

Dosadením $[p, \varphi(p)]$ do (iii) dostaneme

$$p(s) = (\varphi(\varphi(p)))(s) \iff (\varphi(p))(s) = (\varphi(p))(s).$$

Pravá rovnosť platí pre všetky reálne čísla s, takže aj ľavá musí. Polynómy p a $\varphi(\varphi(p))$ tak majú rovnakú hodnotu vo všetkých reálnych bodoch, takže $p = \varphi(\varphi(p))$ platí pre všetky $p \in \mathbb{R}[x]$.

Pozrime sa na konštatný polynóm $p(x) = a \ne 0$. Tento polynóm nemá žiadne reálne korene, takže vďaka (4) ani $\varphi(p)$ nemá. Navyše podľa (ii) platí $\deg(\varphi(p)) \le 1$, takže $\varphi(p)$ je konštantný alebo lineárny. Ale ľubovoľný lineárny polynóm má reálny koreň, a preto $\varphi(p)$ musí byť konštantný polynóm. No a keďže nemá žiadny koreň, tak musí byť nenulový. Ľubovoľný konštantný nenulový polynóm sa tak zobrazí na nejaký konštantný nenulový polynóm.

Teraz si zoberme polynóm $P(x) = x$. Ten má jediný koreň $x = 0$, taže aj $\varphi(P)$ má jediný reálny koreň, a tým je 0. Polynóm $\varphi(P)$ tak musí mať stupeň aspoň 1 (konštantný polynóm má 0 alebo nekonečne veľa koreňov) a podľa (ii) je jeho stupeň nanajvýš 2. Musí teda byť lineárny alebo kvadratický.

Ak by $\varphi(P)$ bol kvadratický, tak $(\varphi(P))(x) = kx^2$ pre nejakú nenulovú konštantu k. Potom $\varphi(k)$ je tiež nenulová konštanta, označme ju l. Dosadením $[P, k]$ do (iii) dostaneme

$$s = l \iff k = ks^2.$$

Ľavá rovnica má zjavne práve jedno riešenie, ale pravá platí aj pre $s = 1$, aj pre $s = -1$, takže máme spor, a teda $\varphi(P)$ nemôže byť kvadratický polynóm.

Polynóm $\varphi(P)$ tak musí byť lineárny s koreňom 0, teda $(\varphi(P))(x) = cx$ pre nejaké nenulové reálne c. Označme $d = \varphi(c)$, pričom d musí byť tiež nenulové. Dosaďme $[P, c]$ do (iii):

$$s = d \iff c = cs.$$

Pravá rovnica platí práve pre $s = 1$, takže aj ľavá musí, teda $1 = d = \varphi(c)$, z čoho s využitím $p = \varphi(\varphi(p))$ dostaneme $c = \varphi(\varphi(c)) = \varphi(1)$. Teraz do (iii) môžeme dosadiť $[P, 1]$:

$$s = c \iff 1 = cs.$$

Takže pre $s = c$ platí aj pravá rovnica, teda $1 = c^2$. Musí tak byť $c = 1$ alebo $c = -1$.

Ak $c = 1$, tak pre ľubovoľnú konštantu $a \in \mathbb{R}$ po dosadení $[P, a]$ do (iii) máme

$$s = \varphi(a) \iff a = s,$$

takže $\varphi(a) = a$. Potom pre ľubovoľné $p \in \mathbb{R}[x]$ po dosadení $[p, a]$ do (iii) dostaneme

$$p(s) = a \iff a = (\varphi(p))(s).$$

To znamená, že $\varphi(p) = p$ pre všetky $p \in \mathbb{R}[x]$.

Nakoniec, ak $c = -1$, tak podobne ako v predošlom prípade pre $a \in \mathbb{R}$ po dosadení $[P, a]$ do (iii) získame

$$s = \varphi(a) \iff a = -s,$$

takže tentokrát $\varphi(a) = -a$. Opäť do (iii) dosadíme $[p, a]$, kde $p \in \mathbb{R}[x]$:

$$-p(s) = a \iff p(s) = -a \iff a = \varphi(p)(s).$$

Teraz teda máme $\varphi(p) = -p$ pre všetky polynómy $p \in \mathbb{R}[x]$.

Dokázali sme tak, že žiadne iné riešenie okrem $\varphi(p) = p$ a $\varphi(p) = -p$ naozaj neexistuje.

(Lucia Krajčoviechová)