TR *i*KS ko

Úloha 1. *Miško chce uspořádat všechna kladná celá čísla od* 1 *do* 2024 *do kruhu tak, aby bylo každé číslo použito právě jednou a pro libovolné tři po sobě jdoucí čísla* a, b, c *bylo číslo* $a + c$ *dělitelné číslem* $b + 1$*. Může to udělat?*

Úloha 2. *Nechť* p *je prvočíslo. Rozhodněte, zda v čtvercové síti o rozměrech* $p \times p$ *vrcholů lze zvolit* p *vrcholů tak, že žádné tři neleží na přímce.*

Úloha 3. *Nechť* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *jsou kladná reálná čísla pro* $n \geq 2$*. Pro permutaci* $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ *posloupnosti* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *definujeme její skóre jako*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i^2}{b_{i+1}}.$$

Ukažte, že některé dvě permutace posloupnosti $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *mají skóre, které se liší aspoň o* $3|a_1 - a_n|$*.*

Úloha 4. *Rovnoramenný trojúhelník* $\triangle ABC$*, splňující* $AB = AC$*, je vepsán do kružnice* ω*. Nechť* P *je libovolný bod na oblouku* $\overset{\frown}{BC}$*, který neobsahuje* A*, a nechť* I_B *a* I_C *označují vepsiště trojúhelníků* $\triangle ABP$ *a* $\triangle ACP$*. Dokažte, že při libovolné volbě bodu* P *prochází kružnice opsaná trojúhelníku* $\triangle PI_BI_C$ *pevným bodem.*

Úloha 5. *Je dán kompletní graf na* 2024 *vrcholech, ve kterém má každá hrana váhu* 1 *nebo* 2*. Pokud má každý cyklus sudou celkovou váhu, najděte minimální hodnotu součtu všech vah v grafu.*