Řešení 5. série

Úloha C5. *Množina n čtverců v rovině se nazývá přátelská, pokud splňuje následující kritéria:*

- *Všechny čtverce jsou shodné.*
- *Kdykoliv mají dva čtverce společný bod P, pak P je vrchol obou čtverců.*
- *Každý čtverec se dotýká přesně tří dalších čtverců.*

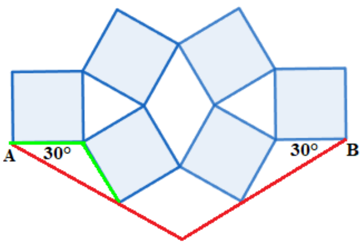
Kolik kladných celých čísel n je mezi $2025 \leq n \leq 5202$ takových, že existuje množina n čtverců, která je přátelská?

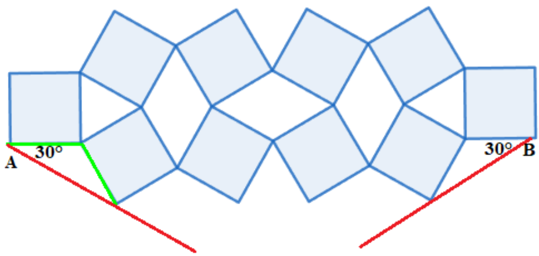
Řešení.

Ukážeme, že v našom rozsahu čísel n priateľská množina štvorcov existuje práve pre párne veľkosti n.

Ak je n nepárne, uvážme graf, kde vrcholy sú jednotlivé štvorce a hranou sú spojené tie, ktoré sa dotýkajú. Ak sa v jednom bode dotýka viacero štvorcov, hranou je spojená každá dvojica z nich. Každý štvorec sa dotýka troch iných, takže z každého vrcholu vychádzajú tri hrany. Súčet stupňov vrcholov je $3n$, avšak súčet stupňov musí byť vždy párny (každá hrana prispieva dvom koncovým vrcholom), a teda n nemôže byť nepárne.

Ďalej nech n je párne. Uvážme nasledovné konfigurácie štvorcov. V prvej máme tri štvorce okolo rovnostranného trojuholníka a potom túto trojicu ešte raz symetricky odzrkadlenú – dokopy 6 štvorcov. V druhej máme ešte štyri štvorce vložené doprostred, dokopy 10 štvorcov.





Všetky štvorce okrem krajných v týchto konfiguráciách sa dotýkajú práve troch iných, krajné sa dotýkajú dvoch. Ak by sme takéto konfigurácie reťazili za seba tak, že sa krajné štvorce budú dotýkať v jednom vrchole, dostaneme množiny štvorcov, kde sa každý štvorec dotýka troch ďalších. Krajné štvorce by sme spojili – vytvorili by sme cyklus, aby sa dotýkali navzájom, a teda tiež mali troch susedov. Rotácie v spoločných vrcholoch krajných štvorcov vieme voliť ľubovoľne tak, aby sme uzavreli cyklus.

Ak použijeme 0, 1 alebo 2 skupiny 10 štvorcov, vieme získať počty štvorcov so všetkými párnymi zvyškami modulo 6 (0 má zvyšok 0, 10 má zvyšok 4 a 20 zvyšok 2). Ďalším pridávaním šestíc vieme dosiahnuť všetky párne čísla väčšie alebo rovné 16.

Ostáva ešte overiť, že sa žiadne štvorce neprekrývajú. Uhol medzi vonkajšími stranami dvoch krajných štvorcov (zelenými) v šestici alebo desatici je 120 stupňov, to znamená, že celá konfigurácia leží v polrovine vymedzenej priamkou (červenou) z krajného vrcholu krajného štvorca (kde sa dve konfigurácie nadpájajú) pod uhlom 30 stupňov. Ak budú všetky uhly v mnohouholníku tvorenom osami symetrie (ekvivalentne úsečkami AB) jednotlivých kópií konfigurácií väčšie ako 60 stupňov, tak k prekryvu nemá ako dôjsť. Ukážeme, že pre naše n sú všetky uhly dokonca neostré, teda aspoň 90 stupňov.

Ak nepoužijeme žiadnu konfiguráciu s 10 štvorcami, už pri 30 štvorcoch bude 5 konfigurácií tvoriť pravidelný päťuholník s tupými uhlami (pri väčších počtoch budú uhly iba väčšie).

Ak použijeme práve jednu desaticu, tak môžeme dať dve šestice takmer kolmo a ďalšie dve približne paralelne s tou desaticou. Keďže dĺžka úsečky AB pri šestici je $3+\sqrt{3}$ (tri dĺžky strany štvorca/rovnostranného trojuholníka a dve výšky trojuholníka) a pri desatici je $4+2\sqrt{3} < 2(3+\sqrt{3})$, sú dve konfigurácie so 6 štvorcami širšie/dlhšie ako jedna s desiatimi. Preto ich vieme usporiadať tak, že uhly (aj ten pri desatici) budú tupé. Stačí nám na to $10+4\cdot 6 = 34$ štvorcov.

Ak použijeme dve desatice, môžeme z nich pri $n \geq 68$ dokonca spraviť dva samostatné cykly a tie rozmiestniť v rovine. Tiež by sme mohli dve desatice a dve šestice usporiadať do obdĺžnika, čím by sme mali všetky uhly neostré (pravé) už pri 32 štvorcoch. Pridanie ďalších šestíc môže uhly iba znížiť, pretože tvoríme väčší cyklus.

Párnych čísel v zadanom intervale, a teda odpoveď na otázku úlohy, je $\frac{5202}{2} - \frac{2024}{2} = 1589$.

(Michal Staník)

Úloha A5. *Určete všechny polynomy P s celočíselnými koeficienty, které splňují $0 \leqslant P(n) \leqslant n!$ pro všechna nezáporná celá čísla n.*

Řešení. Je zrejmé, že $P(0) \in \{0,1\}$. Preto platí buď $P(x) = xQ(x-1)$, alebo $P(x) = 1 + x(Q(x-1)-1)$ pre nejaký polynóm Q s celočíselnými koeficientmi. V prípade $P(x) = xQ(x-1)$ je podmienka pre P ekvivalentná tomu, že Q je sám riešením. V prípade $P(x) = 1+x(Q(x-1)-1)$ je podmienka pre P ekvivalentná tomu, že $1 \leq Q(n) \leq n!$ pre všetky $n \geq 1$, t. j. Q je stále riešením, ale spĺňa o niečo silnejšiu podmienku. Týmto spôsobom je ľahké charakterizovať všetky riešenia indukciou podľa stupňa: Konštantnými riešeniami sú zrejme $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$. Pre lineárne P dostaneme iba $P(x) = x$. Pre kvadratické P dostaneme $P(x) = x(x-1)$ a $P(x) = (x-1)^2$. Pre kubické P môžeme použiť len prvú konštrukciu, aby sme získali $P(x) = x(x-1)(x-2)$ a $P(x) = x(x-2)^2$, keďže obe kvadratické riešenia majú $Q(1) = 0$, takže druhý prípad nie je použiteľný. Ale to platí aj v tomto prípade, takže v ďalšom kroku dostaneme len $P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ a $P(x) = x(x-1)(x-3)^2$ atď. Všeobecne existujú dve riešenia každého stupňa $d \geq 2$ v tvare $x(x-1)(x-2)\dots(x-d+1)$ a $P(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-d+2)(x-d)^2$.

(Martin Kopčány)

Úloha N5. *Pro všechna kladná celá čísla n je funkce $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ definována jako $\gamma(1) = 0$ a pro všechna $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} > 1$ je $\gamma(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$. Mějme aritmetickou posloupnost přirozených čísel $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Nechť pro kladné celé číslo $a > 1$ je posloupnost $\{\gamma(a^{x_i} - 1)\}_{i=1}^{\infty}$ také aritmetickou posloupností. Ukažte, že posloupnost X musí být konstantní.*

Řešení.

(Podle Jakuba Trčky) Nejprve si povšimněme, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ zjevně platí $\gamma(xy) = \gamma(x) + \gamma(y)$.

Lemma Nechť $x \in \mathbb{N}$ a p prvočíslo, kde $p \mid x-1$, a tedy $x > 1$. Potom platí nerovnost

$$\gamma(x^p - 1) < p \cdot \log_p(x) + \gamma(x-1).$$

Důkaz. Zřejmě platí $x^{p-1} + \dots + 1 = \frac{x^p-1}{x-1} \in \mathbb{N}$. Uvažujme libovolné prvočíslo q dělící $x^p - 1$. Jestliže $q \mid x-1$ a tedy $q \neq p$, pak z LTE dostáváme $v_q(x^p-1) = v_q(p) + v_q(x-1) = v_q(x-1)$, odkud plyne, že $q \nmid \frac{x^p-1}{x-1}$. Čísla $x-1$ a $\frac{x^p-1}{x-1}$ jsou tedy nesoudělná. Jestliže naopak $q \nmid x-1$, potom $\mathrm{ord}_q(x) \mid p$ a zároveň $\mathrm{ord}_q(x) \neq 1$, tedy $\mathrm{ord}_q(x) = p$. Je známo, že řád modulo q dělí $q-1$, a proto $p \mid q-1$, což implikuje $q > p$. Odtud již plyne

$$x^p - 1 \geq \frac{x^p - 1}{x-1} = \prod p_i^{\alpha_i} > p^{\gamma\left(\frac{x^p-1}{x-1}\right)}.$$

Proto (jelikož logaritmus se základem $p > 1$ je rostoucí funkce) dostáváme

$$\gamma(x^p - 1) = \gamma(x-1) + \gamma\left(\frac{x^p - 1}{x-1}\right) < \gamma(x-1) + \log_p(x^p - 1) < \gamma(x-1) + p \cdot \log_p(x).$$

$\square$

Nyní přistupme k samotnému důkazu úlohy. Pro spor předpokládejme, že posloupnost X je nekonstantní; jelikož se skládá z přirozených čísel, je zároveň rostoucí.

Je-li posloupnost X soudělná s největším společným dělitelem d, pak předefinováním $X := X/d$ a $a := a^d$ zjevně zůstanou zachovány jak podmínky úlohy, tak i její závěr. Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že X je nesoudělná posloupnost. Z Dirichletovy věty o aritmetických posloupnostech víme, že každá nesoudělná rostoucí posloupnost obsahuje nekonečně mnoho prvočísel. Existuje tedy nekonečná rostoucí posloupnost indexů $N = \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ taková, že x_{n_i} jsou prvočísla. Zvolme L tak, aby pro všechna $i \geq L$ platilo $x_{n_i} > a - 1$; takové L zjevně existuje, neboť posloupnost (x_i) je rostoucí. Pro $k \geq L$ nyní aplikujeme Lemma na $x = a$ a $p = x_{n_k}$. Platí tedy $x_{n_k} \nmid a - 1$, a ze zadání dostáváme

$$\mathcal{O}(x_{n_k}) = \gamma(a^{x_{n_k}} - 1) < x_{n_k} \cdot \log_{x_{n_k}}(a) + \gamma(a-1) = o(x_{n_k}),$$

což je spor, neboť pro dostatečně velké k taková nerovnost nemůže platit.

(Adam „Džavo“ Džavoronok)

Úloha G5. *V trojúhelníku ABC jsou M, N a P středy stran BC, CA a AB. Bod K leží na úsečce NP tak, že AK je osa úhlů $\sphericalangle BKC$. Nechť přímky MN, BK se protínají v bodě E a přímky MP, CK se protínají v bodě F. Předpokládejme, že H je pata kolmice z bodu A na úsečku BC a L je druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům AKH a HEF. Dokažte, že přímky MK, EF a HL se protínají v jednom bodě.*

Řešení. Najprv podľa Pappusovej vety o trojuholníku $BKCNMP$ platí, že $A \in \overline{EF}$, a podľa Pappusovej vety o trojuholníkoch $ABCENK$ a $ACBFPK$ platí, že $\overline{AP} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CE}$. Keďže $\overline{AK}$ je osa uhlov $\angle BKC$ a $\angle EKF$, tak platí

$$\measuredangle FBE = \measuredangle FBK = \measuredangle AKB = \measuredangle CKA = \measuredangle KCE = \measuredangle FCE,$$

z čoho vyplýva, že $BCEF$ je tetivový.

Nech $T = \overline{EF} \cap \overline{NP}$ a $S = \overline{MK} \cap \overline{EF}$. Všimnime si, že

$$-1 = (BC; M\infty_{BC}) \stackrel{K}{=} (EF; ST) \stackrel{M}{=} (NP; KT).$$

Keďže $\overline{BC}$ a $\overline{EF}$ sú antirovnobežné vzhľadom na $\angle K$, $\overline{KS}$ je K-symetrická os trojuholníka $\triangle KEF$, takže $\overline{KT}$ je dotyčnicou k (KEF). Ale $\measuredangle TAK = \measuredangle FEC = \measuredangle ECB = \measuredangle AKT$, z čoho vyplýva, že $TA = TK$. Keďže A a H sú obrazy v osovej súmernosti cez $\overline{NP}$, T je stred kružnice opísanej okolo trojuholníka $\triangle AKH$.

Nech sa (AKH) a (KEF) sa opäť pretínajú v bode D. Keďže (AKH) a (KEF) sú ortogonálne (dotyčnice v priesečníkoch sú kolmé na seba), $\overline{TD}$ je dotyčnicou k (KEF), takže T je pól $\overline{KD}$ a $D \in \overline{MKS}$.

Podľa vety o potenčnom strede pre (HEF), (AKH), (KEF), sme potom hotoví.

(Majda Mišínová)