Řešení 6. série

Úloha C6. *Kuba si z nudy napsal posloupnost n různých reálných čísel. Všiml si, že kdykoliv z této posloupnosti vyškrtá několik čísel tak, aby zbylá posloupnost byla klesající, potom tato nová posloupnost bude obsahovat nanejvýš k čísel. Ukažte, že umí čísla v původní posloupnosti obarvit nejvýše k barvami tak, aby čísla jedné barvy vždy tvořila rostoucí posloupnost.*

Řešení. Barvy očíslujeme od 1 do k a čísla obarvíme následujícím „hladovým“ algoritmem: Postupujeme zleva doprava a v každém kroku postupně vyzkoušíme všechny barvy od první do k-té. Narazíme-li na barvu, která zachová podmínku, že obarvená čísla od jedné barvy tvoří rostoucí posloupnost, tak ji využijeme. Pro spor předpokládejme, že tímto postupem neumíme obarvit celou posloupnost, tzn. existuje krok s číslem a, které neumíme vybarvit.

Nemožnost použít barvu k je způsobena tím, že existuje číslo b_k s barvou k nalevo od a, které je navíc větší než a. Nyní se podíváme na číslo b_k. Před ním musí existovat číslo b_{k-1} s barvou $k-1$ větší než b_k, jinak bychom byli neobarvili b_k barvou k. Analogicky najdeme b_{k-2} s barvou $k-2$ před b_{k-1} a větší než b_{k-1}, atd. Vytvoříme tak klesající posloupnost $b_1, b_2, \dots, b_k, a$ délky $k+1$, což je spor.

Poznámky opravujícího. Většina řešitelů použila myšlenku podobnou vzorovému řešení. Bohužel sepsaní rigorózního řešení dělalo mnohým potíže. Zavedeme-li na posloupnosti částečné uspořádání takové, že číslo a je lepší než b právě tehdy, když $a > b$ a a leží napravo od b, pak naše úloha je vlastně jen znění Dilworthovy věty. *(Anh Dung Le)*

Úloha N6. *Nechť a a b jsou přirozená čísla a c celé číslo. Ukažte, že existuje přirozené x takové, že*

$$b \mid a^x + x - c.$$

Řešení. Posloupnost $(a^i)_{i=1}^{\infty}$ je zřejmě periodická modulo b (s případnou předperiodou), neboť každý člen posloupnosti je určen předchozím, a zároveň členy této posloupnosti mohou nabývat jen b různých hodnot. Označme délku nejkratší periody p. Ta je menší než b, když $b > 1$: Kdyby bylo $p \geq b$, pak protože každý člen posloupnosti určuje ten následující a máme jen b různých hodnot, musí být $p = b$ a mezi těmito p po sobě jdoucími členy této posloupnosti je každý člen právě jednou, konkrétně tam najdeme nulu. Ale potom bude každý další člen posloupnosti 0, takže $p = 1$, takže $b = 1$.

Dokážeme o trochu silnější tvrzení, než se po nás chce, konkrétně, že pro libovolné a, b, c ze zadání existuje libovolně veliké x splňující zadaný vztah. Toto tvrzení dokážeme silnou indukcí podle b. Pro $b = 1$ tvrzení zjevně platí.

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna $b_0 < b$. Potom platí i pro $d = gcd(p, b)$. Víme totiž, že $b > p$, tedy $b > d$.

Z předpokladu víme, že pro každé c existuje x takové, že $d \mid a^x + x - c$. Jinými slovy posloupnost $(a^i + i)_{i=1}^{\infty}$ generuje všechny zbytky modulo d. Proto existují čísla n_0, n_1, n_2, …, n_{d-1} taková, že $a^{n_i} + n_i \equiv i \pmod d$ (což jinými slovy znamená, že $a^{n_i} + n_i = i + m_i d$, která jsou navíc tak veliká, že a^{n_i} už leží v periodické části posloupnosti a^ℓ (tedy a^{n_i} neleží v předperiodě).

Můžeme tedy v Z_b psát rovnosti:

$$\begin{aligned} a^{(n_i+kp)} + (n_i + kp) &\equiv a^{n_i} + n_i + kp && \pmod b \\ &\equiv i + m_i d + kp && \pmod b \\ &\equiv i + d \cdot \left(m_i + k \cdot \frac{p}{d}\right) && \pmod b \\ &\equiv i + dj && \pmod b \qquad (1) \end{aligned}$$

Využili jsme periodičnost posloupnosti $(a^i)_{i=1}^{\infty}$ a indukční předpoklad. Protože $d = gcd(p, b)$, je $\frac{p}{d}$ nesoudělné s b, takže posloupnost $(m + k \cdot \frac{p}{d})_{k=0}^{\infty}$ generuje všechny zbytky modulo b. Zvolíme-li $i \equiv c \pmod{d}$ a $j = \lfloor \frac{c}{d} \rfloor$, stačí nám položit $x = n_i + kp$, kde k je takové, že $m + k \cdot \frac{p}{d} \equiv j \pmod{b}$. Zjevně k umíme zvolit libovolně vysoké, tedy i x umíme zvolit libovolně vysoké. Takže jsme nalezli libovolně velké x takové, že $b \mid a^x + x - c$. *(Vašek Voráček)*

Úloha A6. *Nechť $n > 2$ je přirozené číslo a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kladná reálná čísla. Ukažte, že*

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x_i^3 + x_{i-1}x_i x_{i+1}} \leq \sum_{cyc} \frac{1}{x_i x_{i+1}(x_i + x_{i+1})}.$$

Řešení. Ukážeme, že pro každá tři kladná reálná a, b, c platí

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{b^2 + ac}.$$

Po vynásobení nerovnosti (kladnými) jmenovateli a po zjednodušení dostaneme ekvivalentní tvar $b^4 + ac^3 + a^3c \geq a^2c^2 + 2ab^2c$. Ten se snadno dokáže použitím dvou AG nerovností:

$$b^4 + (ac^3 + a^3c) \geq b^4 + 2a^2c^2 = (b^4 + a^2c^2) + a^2c^2 \geq 2ab^2c + a^2c^2.$$

Pomocnou nerovnost máme dokázanou, můžeme ji tedy použít na (kladná reálná) čísla ze zadání. Nechť tedy $a = x_{i-1}$, $b = x_i$, $c = x_{i+1}$ pro nějaké i (uvažujeme zacyklené indexy, aneb $x_{n+1} = x_1$, $x_0 = x_n$). Výslednou nerovnost ještě vydělíme kladným reálným číslem x_i (ekvivalentní úprava) - dostaneme tedy pro dané i nerovnost

$$\frac{1}{x_i^3 + x_{i-1}x_i x_{i+1}} \leq \frac{1}{x_i(x_{i-1} + x_i)^2} + \frac{1}{x_i(x_i + x_{i+1})^2}.$$

Tyto nerovnosti cyklicky sečteme přes všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ a dále upravujeme, dokud nedostaneme přímo znění dokazované nerovnosti - kromě posunutí indexu v cyklické sumě jde jen o snadné úpravy.

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x_i^3 + x_{i-1}x_i x_{i+1}} \leq \sum_{cyc} \left(\frac{1}{x_i(x_{i-1} + x_i)^2} + \frac{1}{x_i(x_i + x_{i+1})^2} \right) =$$

$$= \sum_{cyc} \frac{1}{x_i(x_{i-1} + x_i)^2} + \sum_{cyc} \frac{1}{x_i(x_i + x_{i+1})^2} = \sum_{cyc} \frac{1}{x_{i+1}(x_i + x_{i+1})^2} + \sum_{cyc} \frac{1}{x_i(x_i + x_{i+1})^2} =$$

$$= \sum_{cyc} \frac{x_i + x_{i+1}}{x_i x_{i+1}(x_i + x_{i+1})^2} = \sum_{cyc} \frac{1}{x_i x_{i+1}(x_i + x_{i+1})}.$$

Což je přesně to, co jsme měli dokázat.

Poznámky opravujícího. Došla tři správná řešení, z nichž se dvě ubírala podobnou cestou jako to vzorové. Za zmínku stojí řešení Danila Koževnikova, který příklad řešil indukcí podle počtu proměnných. Některá ztroskotala na ošemetném používání ztrátových úprav - zvláště u jednodušších homogenních nerovností jako je pomocná nerovnost ze vzorového řešení se víc vyplatí bezeztrátově roznásobovat.

(Marian Poljak)

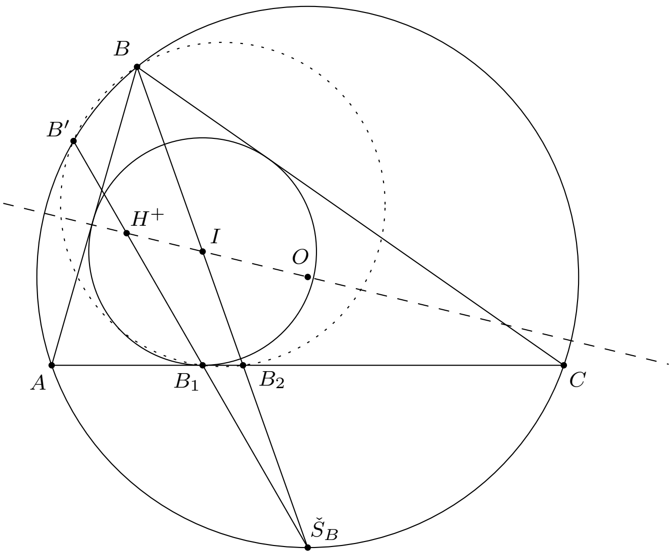
Úloha G6. *Nechť ABC je různostranný trojúhelník. Kružnice vepsaná $\triangle ABC$ se středem I se dotýká AC v bodě B_1. Přímka BI protíná AC v bodě B_2. Označme ω_B kružnici opsanou*

$\triangle BB_1B_2$. Analogicky zkonstruujme ω_A a ω_C. Ukažte, že potenční střed[1] *ω_A, ω_B a ω_C leží na přímce OI, kde O je střed kružnice opsané $\triangle ABC$.*

Řešení.

Buď H^+ střed kladné stejnolehlosti, která převádí kružnici vepsanou ABC na kružnici opsanou ABC. Ukážeme, že H^+ je hledaný potenční střed. Z toho už bude zbytek jasný, protože stejnolehlost převádějící vepsanou kružnici na opsanou také převádí I na O, takže speciálně musí H^+, I a O ležet na jedné přímce.

Označme si jako $\check{S}_B$ průsečík přímky BI s kružnicí opsanou ABC, dále jako B' průsečík $\check{S}_BB_1$ také s touto kružnicí. Všimněme si, že pokud si úsečku AC nakreslíme vodorovně, pak B_1 a $\check{S}_B$ budou „bod dole“ na vepsané a opsané, takže na sebe přechází v uvažované stejnolehlosti. (Formálněji se dá například říct, že tečny v nich jsou rovnoběžné, nebo že $IB_1 \perp AC \perp O\check{S}_B$, takže $IB_1 \parallel O\check{S}_B$ a zároveň B_1 a $\check{S}_B$ leží ve stejné polorovině určené OI.) Tedy H^+ leží na přímce $\check{S}_BB_1$.



Ze Shooting lemmatu plyne, že $B'B_1B_2B$ je tětivový čtyřúhelník. To znamená, že $B' \in \omega_B$. Protože $H^+ \in B'B_1$, je mocnost H^+ k ω_B rovna[2] $H^+B' \cdot H^+B_1$.

Označme si jako k koeficient stejnolehlosti, která převádí kružnici vepsanou na kružnici opsanou a jako m mocnost bodu H^+ ke kružnici opsané. Protože H^+ v dané stejnolehlosti převádí B_1 na $\check{S}_B$, je $H^+B_1 = \frac{H^+\check{S}_B}{k}$. Tedy

$$H^+B' \cdot H^+B_1 = \frac{H^+B' \cdot H^+\check{S}_B}{k} = \frac{m}{k}.$$

[1] Potenční bod tří kružnic je bod, který k nim všem má stejnou mocnost.

[2] Abysme nemuseli rozebírat, jestli leží uvnitř nebo vně kružnice, budeme brát orientované délky.

To znamená, že mocnost H^+ k ω_B je $\frac{m}{k}$. Analogicky dostaneme, že mocnost H^+ k ω_A a ω_C je $\frac{m}{k}$. To ale znamená, že H^+ je hledaný potenční střed, což jsme chtěli ukázat.

Poznámky opravujícího. Přestože úloha byla uvedená jako čtvrtá, nebyla příliš těžká. Sestávala z několika kroků, z nichž žádný nebyl sám o sobě příliš těžký:

1. Pokud se má ukázat, že nějaký bod leží na OI, je to skoro vždycky nějaký střed stejnolehlosti. Tak si je dokreslíme.
2. Máme kružnici opsanou a máme přímku BI. Dává smysl dokreslit si Švrčkův bod. Aha $\check{S}_B$ a B_1 jsou vlastně „ty samé body“, vzhledem ke stejnolehlosti.
3. Protože přímka H^+B_1 „má nějaký smysl“ a chceme nějakou mocnost, je vcelku logické počítat mocnost pomocí průsečíků ω_B s touto přímkou. Vhodný obrázek/kreslící aparát nám řekne, že druhý průsečík leží na kružnici opsané. To je nerychleji vidět ze Shooting lemmatu, ale jde to i „prostě vyúhlit“.
4. Zbytek už nevyžaduje žádnou extra myšlenku, to se prostě udělá.

(Rado Švarc)