Řešení 3. série

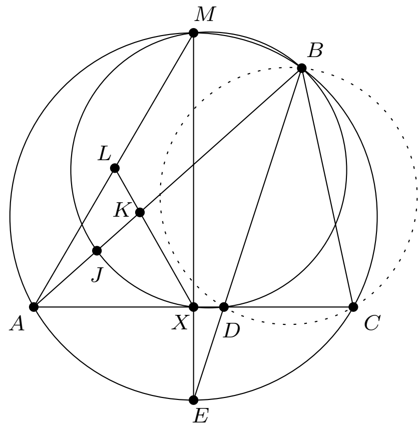
Úloha G3. *Budiž dán trojúhelník ABC, kde $|AB| \neq |BC|$, s kružnicí opsanou k. Osa vnitřního úhlu $\sphericalangle ABC$ protne stranu AC v bodě D. Dále ať M je středem oblouku kružnice k vymezeného body A, C, který obsahuje bod B. Kružnice opsaná trojúhelníku BDM protíná přímku AB podruhé v bodě J. Označme dále K obraz bodu A ve středové souměrnosti podle J. Konečně ať L je průsečík přímek AM a DK. Dokažte, že body K, L, M, B leží na jedné kružnici.*

Řešení. Označme S střed oblouku AC neobsahující bod B, X střed AC a γ velikost úhlu $\angle BCA$.

Protože je M antišvrk, tak MS je průměr k a současně osa úsečky AC procházející X. Tedy $\angle SBM = 90 = \angle SXD = \angle DSM$, takže $DXBM$ je tětivový čtyřúhelník. Užitím mocnosti bodu A ke kružnici opsané $DXBJ$ mám $|AD| \cdot |AX| = |AJ| \cdot |AB|$. Vynásobím celou rovnici dvěma a užiji, že X je střed AC resp. J je střed AK, $|AD| \cdot |AC| = |AK| \cdot |AB|$ tedy body D, C, K, B leží na jedné kružnici.

Nyní rozebereme dva případy:

- pokud $|BA| < |CA|$: $|\angle BMA| = |\angle BCA| = 180 - |\angle BKD| = |\angle BKL|$ tedy $|\angle BML| + |\angle BKL| = 180$, takže body K, L, M, B leží na jedné kružnici.
- pokud $|BA| > |CA|$: $|\angle BMA| = 180 - |\angle BCA| = |\angle DKB| = 180 - |\angle BKL|$ tedy $|\angle BMA| + |\angle BKL| = 180$, takže body K, L, M, B leží na jedné kružnici.



Poznámky opravujícího. Většina došlých řešení správně vyřešila úlohu pro jednu konfiguraci, ale ve více než půlce z nich nebyla vyřešená druhá konfigurace, za což jsem strhávala bod.

(Verča Hladíková)

Úloha C3. *iKSko řeší stálých $2n$ studentů, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Přitom každý rok právě n z nich jede na IMO. Bylo by pěkné, kdyby spolu každí dva řešitelé byli alespoň na jednom. Kolik let nejméně je potřeba, aby se jim to mohlo podařit?*

Řešení. Nejprve uděláme spodní odhad a potom k němu najdeme konstrukci. Každý iKSkař se musí na IMO potkat s $2n-1$ spoluřešiteli, ale na každé IMO se potká pouze s $n-1$ řešiteli, takže musí být alespoň na 3 IMO. Celkem tedy musí být $2n \cdot 3$ účastí, ale každý rok je jich pouze n, takže je potřeba alespoň 6 let.

Pokud je n sudé, můžeme iKSkaře rozdělit na čtvrtiny. Máme tedy 4 skupiny, na IMO můžeme poslat 2 skupiny zároveň a každé 2 skupiny tam musely jet spolu. Je 6 možností jak ze 4 prvkové množiny vybrat 2 prvky, takže nám na to stačí 6 let.

Pokud je n liché, pak bude $n-3$ sudé a budeme hledat konstrukci pro $n=3$ a řešení pro sudé n a vhodně je spojíme. $2n-6$ iKSkařů rozdělíme do 4 stejně velkých skupin - A, B, C, D a zbylých 6 očíslujeme $1,2,3,4,5,6$, pak na IMO můžeme poslat následující výpravy:

$$123AB$$
$$145AC$$
$$156AD$$
$$235BC$$
$$246BD$$
$$346CD$$

a snadno ověříme, že skutečně byl na IMO každý s každým a zároveň jsme vždy na IMO poslali právě n soutěžících, protože $3+2\cdot\frac{2n-6}{4}=n$

(Vašek Voráček)

Úloha A3. *Mějme n přirozené. Na černé nástěnné křídové tabuli jsou napsaná po dvou různá nenulová reálná čísla x_i pro i od 1 do n. Navíc, na bílé magnetické tabuli se stojanem jsou napsaná čísla $x_i+\frac{(-1)^i}{x_i}$ pro i od 1 do n. Rozhodněte, pro která n mohou být na obou tabulích stejná čísla.*

Řešení. Zjevně n nemůže být rovno jedné.

Ukážeme, že n nemže být sudé. Pokud by tomu tak bylo, byl by součet čtverců všech čísel na obou tabulích stejný. Potom by ale platilo

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{(-1)^i}{x_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+2(-1)^i+\frac{1}{x_i^2}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2},$$

což se zjevně nemůže stát.

Zbývá ukázat, že pro lichá $n>1$ taková čísla existují. Nechť platí $n=2k+1$, kde k je přirozené číslo. Buď $f(x)=x+\frac{1}{x}$ a $g(x)=x-\frac{1}{x}$. Položme $h(x)=g(f(g(\cdots f(g(x))\cdots)))-x$, kde se f objevuje k-krát a g se objevuje $(k+1)$-krát. Ukážeme, že existuje $x_1$takové, že $h(x_1)=0$. Potom volbou $x_2=g(x_1), x_3=f(x_2),\ldots,x_n=f(x_{n-1})$ dostaneme (díky tomu, že $x_1=g(x_n)$) n-tici, která splňuje podmínky ze zadání. Jediná podmínka, která není zcela zjevná je, že takto získaná čísla jsou různá. Nechť tedy pro spor $x_k=x_\ell$ pro $k<\ell$, kde toto je nejbližší taková dvojice. Pokud je $\ell-k$ sudé, potom existuje $(\ell-k)$-tice, která splňuje zadání - $x_k, x_{k+1},\ldots,x_{\ell-1}$ nebo $x_{k+1},\ldots,x_\ell$, což je spor s tím, že pro sudá n taková n-tice neexistuje. Pokud je $\ell-k$ liché, je situace o něco komplikovanější.

Buď $p(x)=f(g(x))=x+\frac{1}{x^3-x}$ a $q(x)=g(f(x))=x+\frac{1}{x^3+x}$. Nejprve ukážeme, že pro $x\neq 0,1$ je $|p(x)|>|x|$ a $|q(x)|>|x|$. To stačí ukázat pro x kladná, neboť p a q jsou liché funkce. Pro q je to jasné. Nyní obraťme pozornost k p. Pro $x>1$ je tvrzení zjevné z $p(x)>x$. Pro $x<1$ je z AG nerovnosti $\frac{1}{2}=\frac{(1-x^2)+x^2}{2}\geq\sqrt{(1-x^2)x^2}>(1-x^2)x^2$, tedy $2x<\frac{1}{x-x^3}$, tedy $p(x)=x+\frac{1}{x^3-x}<-x$, z čehož už plyne $|p(x)|>|x|$.

Nyní tedy buď $\ell-k$ liché. BÚNO nechť je k sudé a ℓ liché (nikde nebudeme používat, že $\ell>k$, a tedy toto BÚNO je skutečně BÚNO). Platí $x_1=q^{\frac{n-x_\ell+1}{2}}(x_\ell)$ a $x_k=p^{\frac{k}{2}}(x_1)$. Proto ale platí $|x_1|>|x_\ell|$ a $|x_k|>|x_1|$, takže nemůže být $x_k=x_\ell$.

Nyní tedy chceme ukázat, že existuje x takové, že $h(x)=0$. Funkce f je spojitá na intevalu $(0,\infty)$ a její hodntoy v něm (díky AG nrovnosti) leží v intervalu $[2,\infty)$. Funkce g je spojitá na intevalu $(1,\infty)$ a na tomto intervalu má kladné hodnoty. Proto je h spojitá na intervalu $(1,\infty)$. Stačí tedy říct, že existují $a,b\in(1,\infty)$, že $h(a)<0<h(b)$.

Protože platí $g(f(g(1,1)))\approx 4,14$ a $q(x)>x$ pro $x>1$, je $h(1,1)>0$.

Funkce $g(x)$, $p(x)$ a x^3-x jsou pro dostatečně velká x rostoucí, protože všechny racionální funkce jsou pro dostatečně velká x monotónní a $g(x)$, $p(x)$ i x^3-x jdou zjevně do nekonečna pro x jdoucí do nekonečna.

Jednoduchou indukcí ukážeme, že pro dostatečně velká x je $p^k(x)\le x+\frac{k}{x^3-x}$. Pro $k=1$ nastává rovnost. Nyní nechť $p^k(x)\le x+\frac{k}{x^3-x}$. Potom z rostoucnosti p máme $p^{k+1}(x)=p(p^k(x))\le p(x+\frac{k}{x^3-x})=x+\frac{k}{x^3-x}+\frac{1}{\left(x+\frac{k}{x^3-x}\right)^3-\left(x+\frac{k}{x^3-x}\right)}\le x+\frac{k}{x^3-x}+\frac{1}{x^3-x}=x+\frac{k+1}{x^3-x}$, kde v poslední nerovnosti jsme využili rostoucnost x^3-x.

Vezměme dostatečně velké $x>2k+2$. Potom je $x^6>2x^4$ a $x^4>2k^2$, takže $x^6-x^4>2k^2$, čili $x^3>\frac{2k^2}{x^3-x}$. Zároveň je $x^3>2(k+1)x$, takže $x^3>(k+1)x+\frac{k^2}{x^3-x}$. Tedy $x^3-x>kx+\frac{k^2}{x^3-x}$, takže $\frac{1}{x+\frac{k}{x^3-x}}>\frac{k}{x^3-x}$. Protože je navíc g rostoucí, máme $g(p^k(x))\le g(x+\frac{k}{x^3-x})=x+\frac{k}{x^3-x}-\frac{1}{x+\frac{k}{x^3-x}}<x$, takže $h(x)<0$. Tím máme hotovo.

(Jan Petr, Rado Švarc)

Úloha N3. *Najděte všechna přirozené čísla n taková, že pro libovolné přirozené k existuje přirozené a splňující $n\mid a^3+a-k$.*

Řešení. Ukážeme, že odpověď zní „všechny mocniny trojky“.

Protože každý zbytek a modulo n generuje právě jeden zbytek a^3+a modulo n, je otázka ekvivalentní s tím, že $a^3+a\equiv b^3+b \pmod n$ právě tehdy, když $a\equiv b \pmod n$.

Nyní si dokážeme dvě pomocná tvrzení.

Lemma 1: Pro liché prvočíslo p a celé číslo k takové, že $p\nmid k$ má kongruence $x^2-y^2\equiv k \pmod p$ právě $p-1$ řešení modulo p.

Důkaz: Položíme-li $a=x+y$ a $b=x-y$, platí $x=\frac{a+b}{2}$ a $y=\frac{a-b}{2}$ (to je validní, protože p je liché), což nám dává rovnici $ab\equiv k \pmod p$, která má zjevně $p-1$ řešení (jedno pro každé nenulové a). Protože pro každé x, y existuje odpovídající a, b a vice versa, máme, že původní rovnice má skutečně $p-1$ řešení.

Lemma 2: Je-li $p>3$ prvočíslo, a a, b jsou celá čísla nesoudělná s p, která jsou buď obě kvadratické zbytky, nebo obě kvadratické nezbytky modulo p, pak rovnice $x^2+3y^2\equiv a \pmod p$ a $x^2+3y^2\equiv b \pmod p$ mají stejný počet řešení modulo p.

Důkaz: Z multiplikativity Legenderových symbolů plyne, že existuje t, že $bt^2\equiv a \pmod p$. Pak každé řešení $x^2+3y^2\equiv a \pmod p$ sbijektíme s řešením $x^2+3y^2\equiv b \pmod p$ předpisem $(x,y)\to(tx,ty)$.

Nyní ukažme, že jediným vyhovujícím prvočíslem je 3. Dvojka zjevně nefunguje, a trojka (jak jednoduše ověříme) funguje, takže dále buď $p>3$.

Nechť $a^3+a\equiv b^3+b \pmod p$ neplatí pro žádné $a\not\equiv b \pmod p$. Tuto rovnici upravíme na $(a-b)(a^2+ab+b^2+1)\equiv 0 \pmod p$, neboli $a^2+ab+b^2\equiv -1 \pmod p$. Substituujme $k=a+\frac{b}{2}$, $\ell=\frac{b}{2}$ a dostaneme, že uvažovaná rovnice je ekvivalentní s $k^2+3l^2\equiv -1 \pmod p$. Označme si jako x_i počet různých dvojic (k,l), pro které je $k^2+3l^2\equiv i \pmod p$.

Je-li -1 kvadratický zbytek modulo p, je z lemmatu 2 $x_{-1}=x_{k^2}\ge 2$, takže p nemůže mít -1 za kvadratický zbytek, neboli p není $4m+1$. Buď tedy $p=4m+3$.

Buď $x_{-1}=0$. Pak budou x_i nulová pro všechny kvadratické nezbytky, tedy nejvýše $2m+2$ z hodnot x_i je nenulových.

Nechť P označuje počet řešení rovnice $a^2+3b^2\equiv c^2+3d^2 \pmod p$. Tuto rovnici můžeme upravit na $a^2-c^2\equiv 3(d^2-b^2) \pmod p$. Pokud je pravá strana nenulová, máme díky lemmatu 1

$(p-1)^3$ možností, jak zvolit (a,b,c,d). Je-li naopak nulová, pak máme zjevně $(2p-1)^2$ možností, jak zvolit (a,b,c,d). Takže $P=(p-1)^3+(2p-1)^2$.

Zjevně je $\sum_{i=1}^{p} x_i = p^2$. Zároveň z definice P plyne $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 = P$. Protože z x_i pro i od jedné do p je nanejvýš $2m+2$ nenulových, můžeme si odmyslet ty nulové a z Cauchy-Schwartzovy nerovnosti dostaneme $(2m+2)\left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1} x_i\right)^2$.

To nám po dosazení dá $(2m+2)\left((4m+2)^3+(8m+5)^2\right) \geq (4m+3)^4$, neboli $-128m^4-320m^3-228m^2-110m-15 \geq 0$, což pro kladná m zjevně neplatí. Z toho plyne, že x_{-1} musí být kladné.

Nyní je zjevné, že pokud má n prvočíselného dělitele p různého od 3, pak nemůže vyhovovat, protože naše funkce nenageneruje všechny modulo p a tedy ani všechny zbytky modulo n.Proto n může být jenom mocnina trojky.

To, že všechny mocniny trojky vyhovují, dokážeme indukcí. Pro $n=3^0$ a $n=3^1$ to je zjevně pravda. Nyní nechť tvrzení platí pro $n=3^k$. Ukážeme ho i pro 3^{k+1}.

Nechť $a^3+a \equiv b^3+b \pmod{3^{k+1}}$. Potom máme $a^3+a \equiv b^3+b \pmod{3^k}$, takže $a \equiv b \pmod{3^k}$. Tedy $b=a+t3^k$. Z toho máme $a^3+a \equiv (a+t3^k)^3+a+t3^k \pmod{3^{k+1}}$, neboli $0 \equiv 3a^2 3^k + 3at^2 3^{2k} + t^3 3^{3k} + t3^k \equiv t3^k \pmod{3^{k+1}}$. To ale znamená $b=a+t3^k \equiv a \pmod{3^{k+1}}$, což jsme chtěli.

(Filip Bialas)