Řešení 3. série

Úloha C3. *Džavo by rád obarvil přirozená čísla třemi barvami. Poté, co je obarví, přijde Šošo, vybere si přirozené číslo a rozdělí jeho dělitele na tři hromádky podle barvy. Rozhodněte, zda Džavo může přirozená čísla obarvit tak, aby se velikosti žádných dvou Šošových hromádek nelišily o více než 1, bez ohledu na to, jaké číslo si Šošo vybral.*

Řešení. Džavo naozaj vie ofarbiť prirodzené čísla podľa zadania. Vyhovujúcim ofarbením je napríklad (či existuje aj iné vyhovujúce ofarbenie necháme ako cvičenie pre čitateľa) ofarbiť čísla podľa počtu prvočísel v rozklade (vrátane násobnosti) modulo 3. Už len ukázať, že toto ofarbenie spĺňa zadanie, teda, že pre každé k sa delitele rozdelia na 3 kôpky podľa farieb, pričom ich veľkosti sa nelíšia viac ako o 1.

Tvrdenie očividne platí pre $k = 1$. Nech n je najmenšie číslo, pre ktoré tvrdenie neplatí. Uvažujme ľubovoľný prvočíselný deliteľ p čísla n. Nech $n = mp^\alpha$, kde $\alpha = v_p(n)$, teda $p \nmid m$. Všetky delitele n sú potom práve čísla tvaru dp^β, kde d je deliteľ m a $0 \leq \beta \leq \alpha$. Vieme, že pre m tvrdenie platí, keďže $m < n$, teda delitele m sa rozdelia na 3 kôpky, ktoré sa navzájom nelíšia viac ako o 1. Uvažujme 3 možné prípady:

Ak $\alpha \equiv 2 \pmod 3$, tak vieme pre každé $d \mid m$ potrojičkovať delitele dp^a, dp^{a+1}, dp^{a+2} pre všetky $a = 0, 3, 6, ..., \alpha - 2$. V každej trojici sú delitele inej farby, teda z každej farby je rovnako deliteľov.

Ak $\alpha \equiv 0 \pmod 3$, tak vieme delitele podobne potrojičkovať, akurát nám zostanú delitele tvaru dp^0, teda práve delitele čísla m. Keďže ale m spĺňa zadanie, tak aj n musí.

Ak $\alpha \equiv 1 \pmod 3$, tak môžeme zase delitele potrojičkovať, ale tento krát pridáme do množiny deliteľov aj čísla tvaru $dp^{\alpha+1}$. Deliteľov je teraz rovnako v každej farbe, no ešte musíme odrátať čísla tvaru $dp^{\alpha+1}$. Tie sú medzi farbami rozdelené rovnako, ako delitele d čísla m, ale posunuté o 2 farby, keďže $\alpha + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Preto sa budú skupiny podľa farieb spravené z čísel tvaru $dp^{\alpha+1}$ líšiť navzájom najviac o 1. Teda keď ich odrátame od farebne rovnomerne rozloženej množiny čísel tvaru dp^β, kde $0 \leq \beta \leq \alpha + 1$ (tým dostaneme množinu deliteľov n), tak dostávame 3 farebné množiny, ktorých veľkosti sa navzájom nelíšia viac ako o 1.

Preto n vyhovuje nášmu ofarbeniu, čím sme došli ku sporu. Ofarbenie preto spĺňa zadanie pre všetky prirodzené k, čo bolo treba dokázať.

(Jakub „Šošo“ Šošovička)

Úloha N3. *Jsou dána celá čísla a, b, z nichž následně zkonstruujeme rekurentní posloupnost celých čísel danou $x_0 = x_1 = 0$ a splňující*

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n + 1$$

pro všechna $n \geq 0$. Dokažte, že pro každé prvočíslo p je $\mathrm{NSD}(x_p, x_{p+1})$ buďto roven 1, anebo je větší než $\sqrt{p}$.

Řešení. Pro pevné prvočíslo p označme $\mathrm{NSD}(x_p, x_{p+1})$ jako d. Budeme zkoumat posloupnost $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ modulo d. Uvědomme si, že každý člen je přesně určen předchozími dvěma členy. Modulo d je pouze d různých hodnot, kterým mohou členy nabývat, pokud se tedy budeme dívat na posloupnost dvojic po sobě jdoucích členů, tedy (x_i, x_{i+1}) pro nezáporná celá i, takovýchto různých (uspořádaných) dvojic je modulo d nanejvýš d^2. Proto se po nějaké době musí začít periodicky opakovat, a jelikož dvojice po sobě jdoucích členů přesně definuje následující člen, i ty se musí po nějaké době periodicky opakovat. Navíc se posloupnost dvojic (tedy i členů) musí začít opakovat nejpozději u členu d^2, jelikož právě tolik různých hodnot můžou dvojice nabývat. Nechť délka minimální periody je k, tedy $k \leq d^2$. Délka minimální periody musí dělit délku libovolné periody a

$$x_0 = x_1 = 0 \equiv x_p \equiv x_{p+1} \pmod d,$$

tedy délka jedné z period je právě p. To ale znamená, že $k = 1$, nebo $k = p$. Pokud $k = 1$, pak $1 = x_2 \equiv x_1 = 0 \pmod d$, a tedy $d = 1$. Pokud $k = p$, pak $p = k \le d^2$, neboli $d \ge \sqrt{p}$. Rovnost nemůže nastat, jelikož by p muselo být čtvercem celého čísla, což zřejmě není, tedy platí ostrá nerovnost, jak jsme měli dokázat.

Poznámky opravujícího. Prakticky všechna řešení se vydala stejnou cestou jako vzorové řešení a byla až na pár drobností správná.

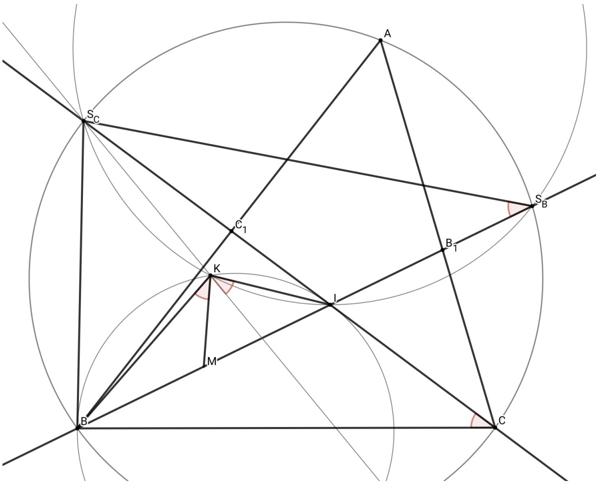
(Michal Janík)

Úloha G3. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme střed kružnice vepsané I. Dále nechť $B_1 = BI \cap AC$ a $C_1 = CI \cap AB$. Označme M, N jsou postupně středy BI a CI. Body K, L leží postupně v trojúhelnících BIC_1 a B_1IC, přičemž splňují $|\sphericalangle BKI| = |\sphericalangle CLI| = |\sphericalangle BIC|$, $|\sphericalangle BKM| = |\sphericalangle ICB|$, $|\sphericalangle CLN| = |\sphericalangle IBC|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a KIL mají stejný poloměr.*

Řešení. Nech S_B a S_C sú Švrčkove body oproti vrcholom B a C. Zamerajme sa na kružnicu (BKI). Zo zadanej uhlovej podmienky a vety o úsekovom uhle vyplýva, že priamka CI je dotyčnicou ku kružnici (BKI). Keďže je známe, že $|S_CB| = |S_CI|$ tak následne aj priamka S_CB je dotyčnicou ku kružnici (BKI). Po zvyšok riešenia budeme uhliť orientovane. Ľahhko nahliadneme, že priamka S_CK je symediánou v trojuholníku KIB. Už nám ju stačí dať do súvisi s jej izogonálou, ktorou je ťažnica KM a môžeme smelo uhliť, pričom použijeme zadané uhlové podmienky a obvodové uhly na kružnici (ABC)

$$\sphericalangle(KS_C, KI) = \sphericalangle(KB, KM) = \sphericalangle(CB, CS_C) = \sphericalangle(S_BS_C, S_BB) = \sphericalangle(S_BS_C, S_BI),$$

z čoho vyplýva, že štvoruholník S_CS_BKI je tetivový. Analogicky sa ukáže, že aj bod L leží na tejto kružnici, ktorá je potom aj kružnicou opísanou trojuholníku KIL. Rovnosť polomerov následne vyplýva z osovej súmernosti bodov A a I podľa priamky S_BS_C, teda aj samotné kružnice ABC a KIL sú podľa tejto priamky súmerné.



(Adam „Džavo“ Džavoronok)

Úloha A3. *Je dáno přirozené číslo n a dále pro každou trojici indexů $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ číslo $a_{ijk} \in \{-1, 1\}$. Dokažte, že lze zvolit tři n-tice $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n \in \{-1, 1\}$ tak,* *aby bylo splněno*

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk}x_iy_jz_k\right| > \frac{n^2}{3}.$$

Řešení. Označme výraz ze zadání S a dále označme

$$S_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_iy_j$$

pro $1 \le k \le n$. Platí

$$S = \sum_{k=1} z_kS_k.$$

Nyní předpokládejme, že už jsme zvolili všechna x a y, takže jsou všechna S_k fixní. Vhodnou volbou z potom můžeme dosáhnout

$$S = \sum_{k=1} |S_k|.$$

Když se nám tedy podaří zvolit x a y tak, aby součty $|S_k|$ byly velké, budeme hotovi. Zkusme x a y zvolit nezávisle náhodně. Ukážeme

$$\mathbb{E}(|S_k|) > \frac{n}{3}.$$

Využijeme metodu momentů. Místo toho, abychom $\mathbb{E}(|S_k|)$ odhadovali přímo, odhadneme $\mathbb{E}(S_k^2)$ a $\mathbb{E}(S_k^4)$ a využijeme nerovnosti

$$\mathbb{E}(|S_k|)^2\mathbb{E}(S_k^4) \ge \mathbb{E}(S_k^2)^3.$$

Tato nerovnost je ekvivalentní

$$(b_1 + \cdots + b_n)^2(b_1^4 + \cdots + b_n^4) \ge (b_1^2 + \ldots b_n^2)^3,$$

kde $b_1, \ldots, b_n$ jsou kladná reálná čísla, což je důsledek Hölderovy nerovnosti[1]. Nyní nám stačí odhadnout příslušné střední hodnoty. Z linearity střední hodnoty platí

$$\mathbb{E}(S_k^2) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\mathbb{E}(x_{i_1}y_{j_1}x_{i_2}y_{j_2}).$$

Výraz $\mathbb{E}(x_{i_1}y_{j_1}x_{i_2}y_{j_2})$ je ovšem nenulový pouze za podmínky $i_1 = i_2$ a $j_1 = j_2$. Dostáváme tedy

$$\mathbb{E}(S_k^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\mathbb{E}(x_i^2y_j^2) = n^2.$$

Stejnou úvahou můžeme spočítat $\mathbb{E}(S_k^4)$. Výraz $\mathbb{E}(S_k^4)$ je roven počtu uspořádaných osmic

$$(i_1, i_2, i_3, i_4, j_1, j_2, j_3, j_4)$$

takových, že ve čtveřicích (i_1, i_2, i_3, i_4) a (j_1, j_2, j_3, j_4) je počet výskytů každého čísla sudý. Čtveřice jsou nezávislé, pro každou z nich máme

$$n + \binom{4}{2}\binom{n}{2} < 3n^2$$

možností. Dostáváme $\mathbb{E}(S_k^4) < 9n^4$, čímž je úloha vyřešena.

(Martin „Kopy“ Kopčány)

[1]Používáme tvar Hölderovy nerovnosti, který najdeš třeba v `https://prase.cz/archive/29/9.pdf`.