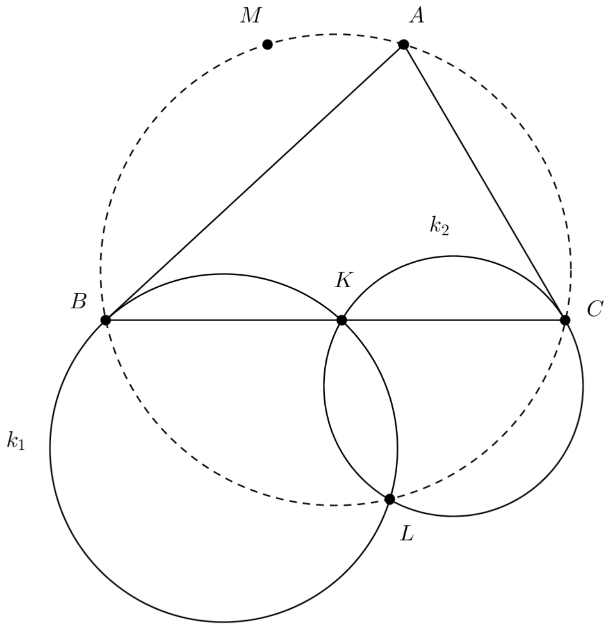
Řešení 2. série

Úloha G2. *Na straně BC trojúhelníku ABC je dán bod K. Kružnice k_1 a k_2 procházejí bodem K a dotýkají se stran AB a AC po řadě v bodech B a C. Označme L jejich průsečík různý od K a M obraz bodu A v osové souměrnosti podle osy strany BC. Dokažte, že body K, L a M leží na jedné přímce.*

Řešení. Nejprve dokážeme, že body A a L leží v opačných polorovinách podle přímky BC. Pro spor uvažujme, že leží ve stejné polorovině, podle zmíněné přímky. Pak $|\angle BKL| + |\angle CKL| = 180°$. Z rovnosti úsekových a obvodových úhlů ke kružnicím k_1 a k_2 plyne: $|\angle ABL| = |\angle BKL|$ a $|\angle ACL| = |\angle CKL|$, takže $|\angle ABL| + |\angle ACL| = 180°$, a z toho $|\angle BAC| < 0°$, což být nemůže. Body A a L tedy leží v opačných polorovinách podle přímky BC.

Teď dokážeme, že body A, B, C a L leží na jedné kružnici. $|\angle ABK|$ je úsekový úhel a $|\angle BLK|$ je obvodový úhel nad stejnou tětivou BK, takže se rovnají. Podobně pro $|\angle ACK|$ a $|\angle CLK|$. Takže $|\angle BLC| = |\angle BLK| + |\angle KLC| = |\angle ABC| + |\angle ACB| = 180° - |\angle BAC|$. $|\angle BAC| + |\angle BLC| = 180°$. Body A a L leží v opačných polorovinách určených přímkou BC, proto všechny čtyři zmíněné body leží na jedné kružnici.



Trojúhelníky ABC a MCB jsou osově souměrné, takže jsou podobné. Dále platí $|\angle ABC| = |\angle MCB|$. Spolu s dříve ukázaným: $|\angle BLK| = |\angle ABK| = |\angle ABC| = |\angle MCB|$. Zároveň z rovnosti obvodových úhlů víme, že $|\angle MLB| = |\angle MCB|$, protože oba body, C a L, leží ve stejné polorovině podle přímky MB. Z těchto rovností vyjde $|\angle MLB| = |\angle KLB|$. Body M a K leží ve stejné polorovině podle přímky BL, takže přímky LK a LM jsou shodné. Body K, L a M tedy leží na jedné přímce.

Poznámky opravujícího. Většina řešitelů úlohu vyřešila správně, ale zapomněla, nebo nepovažovala za nutné se zmínit o poloze bodů vůči tětivě při počítaní s obvodovými úhly. Body jsem za to nestrhával, ale myslím, že by to součástí řešení být mělo. V lepším případě s důkazem, v horším alespoň říci, že to tak je.

(Vašek Voráček, Rado Švarc)

Úloha C2. *Fyzik izoloval 2016 atomů, z nichž každý může mít nejvýše jeden elektron. K dispozici má diodu, kterou když zapojí mezi dva atomy A a B ve směru od A do B a A zrovna má elektron a B ne, elektron se přesune k B. V ostatních případech se nestane nic. Fyzik má za úkol vybrat dva atomy a poté libovolně používat diodu (i s ostatními atomy), aby měl jistotu, že oba vybrané mají na konci stejný počet elektronů. Může se mu to podařit, když nezná počáteční rozmístění elektronů a při použití diody nepozná, jestli došlo, nebo nedošlo k přesunu elektronu?*

Řešení. (Podle Laury Vištanové)

Nejprve si rozmyslíme, co po nás úloha vlastně chce: Máme atomy očíslované $1, 2, \ldots, 2016$. A chceme rozhodnout, zda existuje taková posloupnost přikládání diod (budeme jí říkat *algoritmus*) a dva různé atomy A, B, že pro každé rozmístění elektronů v atomech $1, 2, \ldots, 2016$ takové, že každý atom má nejvýše jeden elektron, platí, že po provedení algoritmu na toto rozmístění bude mít atom A elektron právě tehdy, když ho bude mít atom B.

Sporem dokážeme, že takový algoritmus neexistuje. Předpokládejme tedy, že takový algoritmus máme. Označme A_i takové rozmístění elektronů, že elektron je v atomu x právě tehdy když $x \leq i$. A zapišme si $A_1, A_2, \ldots, A_{2016}$ do tabulky (v i-tém řádku a j-tém sloupci je 1 právě tehdy, pokud má v A_i atom číslo j elektron):

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & 2016 \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{2016} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Všimněme si, že pro každé dva sloupce $i \neq j$ platí, že buď $i \subset j$, anebo $j \subset i$ (v tom smyslu, že pro každý řádek, v němž je ve sloupci i 1 je v něm 1 i ve sloupci j respektive naopak). Spustíme nyní náš algoritmus na všechny řádky této tabulky najednou. Dokážeme, že se v jeho průběhu nemění množina sloupců, jen jejich pořadí: Máme-li zapojit diodu $a \to b$, tak je buď $a \subset b$, nebo $b \subset a$. V prvním případě se nic nestane, ve druhém případě se sloupce a a b prohodí.

Kdyby existovaly takové dva atomy A a B, že na konci budou pro každý počáteční stav mít stejný počet elektronů, musely by speciálně mít stejný počet elektronů pro každý počáteční stav $A_1, A_2, \ldots, A_{2016}$, ale to znamená, že by nějaké dva sloupce musely být stejné, což nejsou.

(Matěj Konečný)

Úloha A2. *Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jsou kladná reálná čísla splňující*

- $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$,
- $b_1 b_2 ... b_k \geq a_1 a_2 ... a_k$ *pro každé* $1 \leq k \leq n$.

Dokažte, že $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Řešení. Položme $d_0 := 0$ a $d_k := \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{b_i}{a_i} - 1 \right)$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Z druhé zadané podmínky a díky AG nerovnosti dostáváme

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{a_i} \geq k \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{b_i}{a_i}} \geq k,$$

a tedy $d_k \geq 0$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$.

Upravujme dokazovanou nerovnost:

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(d_i - d_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} d_i(a_i - a_{i+1}) + a_n d_n \geq 0$$

díky první podmínce, nerovnosti $d_k \geq 0$ a tomu, že a_n je kladné.

Poznámky opravujícího. Úprava sumy tvaru $\sum_{i=1}^{k} x_i y_i$ pomocí částečných součtů jedné z n-tic (zde použito pro $x_i = \frac{b_i}{a_i} - 1, y_i = a_i$) se nazývá *Abelova parciální sumace* a můžete ji potkat v matematické analýze při práci s řadami. Všechna správná řešení byla kompletní a obdržela plný počet bodů. Mezi metodami se objevila také Karamatova nerovnost[1]. *(David Hruška)*

Úloha N2. *Prvočíslo p má tu vlastnost, že $\frac{p-1}{2}$ je také prvočíslo. Nechť a, b a c jsou přirozená čísla nesoudělná s p. Dokažte, že p dělí výraz $a^n + b^n + c^n$ pro nejvýše $1 + \sqrt{2p}$ hodnot n z množiny $\{1, \dots, p-1\}$.*

Řešení. Nejprve předpokládejme, že $b \equiv \pm a \pmod p$ a $c \equiv \pm b \pmod p$. Potom pro každé n je $a^n + b^n + c^n \equiv \pm a^n$ nebo $3a^n \pmod p$. Protože $p \neq 3$ (protože $\frac{3-1}{2}$ není prvočíslo) a $p \nmid a$, platí $p \nmid a^n + b^n + c^n$. Tvrzení úlohy je potom triviální. Dále tedy můžeme BÚNO (díky symetrii v b a c) předpokládat, že $a \not\equiv \pm b \pmod p$, neboli $ab^{-1} \not\equiv \pm 1 \pmod p$, kde b^{-1} je inverzní prvek k b modulo p.

Nechť $q = \frac{p-1}{2}$ a nechť d je řád[2] ab^{-1} modulo p. Platí, že d dělí $p - 1 = 2q$. Ovšem protože $ab^{-1} \not\equiv \pm 1 \pmod p$, je $d \nmid 2$, takže (protože q je prvočíslo) je $d = q$ nebo $d = 2q$.

Nechť S je množina všech přirozených $n < p$ takových, že $p \mid a^n + b^n + c^n$ a nechť s_t je počet všech uspořádaných dvojic (i, j) takových, že $i, j \in S$ a $i - j \equiv t \pmod{p-1}$.

Lemma. *Pro každé přirozené t nesoudělné s q platí $s_t \leq 2$.*

Důkaz. Nechť $i, j \in S$ a $i - j \equiv t \pmod{p-1}$. Potom máme

$$\begin{aligned}
a^j + b^j + c^j &\equiv 0 \pmod p\\
a^j c^{i-j} + b^j c^{i-j} + c^i &\equiv 0 \pmod p\\
a^j c^{i-j} + b^j c^{i-j} - a^i - b^i &\equiv 0 \pmod p\\
a^j(c^t - a^t) + b^j(c^t - b^t) &\equiv 0 \pmod p
\end{aligned}$$

Kdyby bylo $c^t \equiv a^t \pmod p$, pak z poslední rovnosti plyne $c^t \equiv b^t \pmod p$, tedy $(ab^{-1})^t \equiv 1 \pmod p$. Potom ale z vlastností řádu platí $q \mid d \mid t$, což je ale spor s tím, že $q \nmid t$. Potom ale můžeme psát

$$\left(ab^{-1}\right)^j \equiv (b^t - c^t) \cdot (c^t - a^t)^{-1} \pmod p.$$

Pro fixní t je pravá strana této rovnice fixní, takže i $(ab^{-1})^j$ je fixní. Protože řád ab^{-1} je buď q nebo $2q$, existují nanejvýš dvě přirozená $j < p$ splňující tuto rovnost (a každé z nich má k sobě jednoznačně určené přirozené $i < p$ takové, že $i - j \equiv t \pmod{p-1}$). Tím je lemma dokázáno. $\square$

Nyní si uvědomme, že pro každý prvek i z S existuje alespoň $|S| - 2$ prvků S , které se od i liší o hodnotu nedělitelnou q modulo $p - 1$ (protože maximálně jeden prvek se liší o hodnotu

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Karamata's_inequality`

[2] Pokud nevíte, co je řád, podívejte se např. do prvního příspěvku v `http://iksko.org/files/sbornik5.pdf`

dělitelnou p). Počítáním těchto dvojic dvěma způsoby dostaneme

$$\begin{aligned} |S|\,(|S|-2) &\leq \sum_{t\neq q} s_t \leq 2(p-2) \\ (|S|-1)^2 &\leq 2p-3 \\ |S| &\leq \sqrt{2p-3}+1 < \sqrt{2p}+1, \end{aligned}$$

což jsme přesně chtěli dokázat.

Poznámky opravujícího. Všichni, kdo úlohu poslali z ní dostali devět bodů ze sedmi. Toto tvrzení by bylo daleko víc kuul, pokud by úlohu skutečně někdo poslal. *(Rado Švarc)*