Řešení 5. série

Úloha A5. *Jsou dána kladná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ splňující $a_1+a_2+\dots+a_n = 1$. Dokažte, že platí*

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right) \geq \left(n^2-1\right)^n.$$

Řešení. Pokud $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$, pak zřejmě ve zkoumané nerovnosti nastane rovnost, tedy tvrzení platí. Ukážeme algoritmus, který převede posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^n$ na posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{i=1}^n$, kde v každém kroku algoritmu vytvoříme novou sekvenci $\{a_i\}_{i=1}^n$ tak, že hodnota levé strany nerovnosti se sníží. Pokud tedy platí nerovnost po úpravách, platila i před nimi.

Krok algoritmu je následující. Vezměme posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^n$, ve které je alespoň jeden člen různý od $\frac{1}{n}$, pak jsou takové členy alespoň 2 a jejich hodnoty jsou a, b, kde $a < \frac{1}{n}$ a $b > \frac{1}{n}$. Vytvoříme novou posloupnost, ve které členy a, b nahradíme hodnotami $\frac{1}{n}$ a $a+b-\frac{1}{n}$, ostatní zachováme. Součet posloupnosti zůstal roven jedné a všechny členy posloupnosti jsou stále kladné. Stačí ukázat následující:

$$\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\left(\frac{1}{b^2}-1\right) \geq \left(n^2-1\right)\left(\frac{1}{\left(a+b-\frac{1}{n}\right)^2}-1\right).$$

Tuto nerovnici rozložíme na dvě tak, že stačí dokázat platnost nerovnic (1) a (2).

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right) \geq (n-1)\left(\frac{1}{a+b-\frac{1}{n}}-1\right), \tag{1}$$

$$(a-1)(b-1)(na+nb-1) \geq ab(n-1)(n-na-nb+1),$$

$$\begin{aligned} na^2b + nab^2 - ab - nab - nb^2 + b - na^2 - nab + a + na + nb - 1 &\geq \\ \geq n^2ab - n^2a^2b - n^2ab^2 + nab - nab + na^2b + nab^2 - ab&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -n(a^2+b^2+2ab-a-b) + a + b - 1 + n^2ab(a+b-1) &\geq 0, \\ -n((a+b)^2-(a+b)) + (a+b-1) + n^2ab(a+b-1) &\geq 0, \\ (a+b-1)(-n(a+b)+1+n^2ab) &\geq 0, \\ (a+b-1)(na-1)(nb-1) &\geq 0. \end{aligned}$$

První člen součinu je nekladný, protože součet všech členů je 1. Druhý je záporný protože jsme volili $a < \frac{1}{n}$ a třetí člen je kladný protože $b > \frac{1}{n}$, celkově je tedy součin nezáporný, a protože úpravy byli ekvivalentní, nerovnost (1) platí.

$$\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right) \geq (n+1)\left(\frac{1}{a+b-\frac{1}{n}}+1\right). \tag{2}$$

Druhá nerovnost se po velmi podobných úpravách dostane do tvaru

$$(a+b+1)(na-1)(nb-1) \leq 0,$$

což opět platí.

Poznámky opravujícího. Asi polovina řešení byla vedena v tomto duchu, kdy řešitel našel rovnost a následně ukázal, že jindy je levá strana nerovnosti menší. Při tom se často derivovalo, žádné řešení ale nevyužilo metodu Lagrangeových multiplikátorů, která by řešení ještě více zjednodušila. *(Vašek Voráček)*

Úloha C5. Závodní trať *je lomená čára v rovině složená z konečně mnoha orientovaných úseček, z nichž žádné dvě se neprotínají ve svých vnitřních bodech. Zatáčka je bod, který je koncovým bodem jedné z těchto úseček a počátečním bodem té následující. Zatáčka B mezi orientovanými úsečkami $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$* je pravotočivá, *pokud má řidič formule jedoucí z A do B bod C po pravé ruce. Analogicky definujeme* levotočivou *zatáčku.*

V rovině je dáno n bodů v obecné poloze[1]*. Kuba by chtěl postavit závodní trať složenou z $n-1$ orientovaných úseček, jejichž krajními body je právě těchto n bodů. Lenka mu zadala posloupnost délky $n-2$ složenou ze znaků R, L, kde R značí pravotočivou a L levotočivou zatáčku. Dokažte, že Kuba dovede body propojit závodní tratí tak, aby pravotočivost či levotočivost jejích zatáček přesně odpovídala posloupnosti, kterou Lenka zadala.*

Řešení. Ukážeme, že trasa dokonce může začít v libovolném bodě na konvexním obalu. Tvrzení dokážeme pomocí matematické indukce. Pro $n \leq 2$ platí triviálně (trasa nemá žádné zatáčky). Dále předpokládejme, že tvrzení platí pro n a dokažme jej pro $n+1$.

Zvolme tedy libovolný bod na konvexním obalu a označme jej A. Dále uvažme nejbližší bod na konvexním obalu ve směru po a proti hodinových ručiček a označme je B a C. Jestliže má být následující zatáčka L, zvolíme jako první úsečku AC, v opačném případě AB. Můžeme si všimnout, že následující zatáčka určitě bude v požadovaném směru, protože všechny body jsou nalevo, respektive napravo, od právě zvolené úsečky. Vybraná úsečka se také určitě nebude protínat s žádnou další, protože leží na konvexním obalu.

Zbytek dráhy můžeme dokončit z indukčního předpokladu. Tím bylo tvrzení dokázáno.

Poznámky opravujícího. Všechna řešení byla víceméně stejná, jako to vzorové.

(Josef Minařík)

Úloha G5. *Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P, Q takové, že platí $|\angle PBA| = |\angle QBC|$, $|\angle PCB| = |\angle QCA|$ a $|\angle PAC| = |\angle QAB|$. Nechť jsou O_1, O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníků PBC a QBC. Dokažte, že $|\angle BAO_1| = |\angle CAO_2|$.*

Řešení. K trikovému řešení se ti může hodit PraSečí seriál Geometrie trojúhelníka 2[2] o antirovnoběžnosti a kamarádech. Řešení hýbáním s body využívá metodu popsanou v PraSečím seriálu Projektivní geometrie 3[3].

Řešení trikovým zobrazením. Označme K, L průsečíky kružnice opsané (BPC) s AB resp. AC. Všimni si, že

$$|\sphericalangle PKA| = |\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle ACQ|,$$

kde první rovnost plyne z tětivovosti $KLCB$ a druhá z toho, že P, Q jsou kamarádi. Z kamarádství P, Q taky $|\sphericalangle QAC| = |\sphericalangle KAP|$. Takže trojúhelníky ACQ a AKP jsou podobné. I když jsme teprve začali, už jsme udělali všechnu práci a můžeme úlohu nahlédnout.

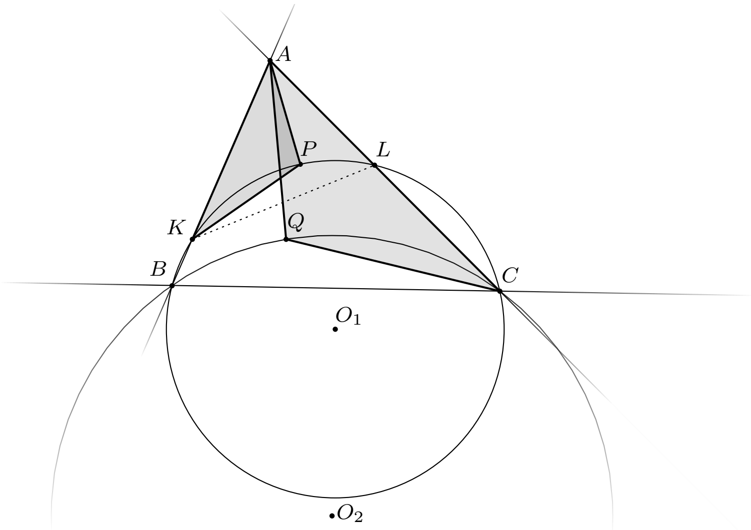
V úhlu BAC jsou přímky KL a BC antirovnoběžné, takže pokud překlopíme KL podle osy úhlu u A, budou rovnoběžné. Takže existuje zobrazení ϕ, které je složením stejnolehlosti se středem v A a překlopení podle osy úhlu u A takové, že zobrazuje $L \mapsto B$ a $K \mapsto C$. Protože $ACQ \sim AKP$, tak v tomto zobrazení $P \mapsto Q$. To ale znamená, že se na sebe zobrazí i kružnice $(KPL) \mapsto (CQB)$. Takže se na sebe zobrazí i jejich středy $O_1 \mapsto O_2$. Takže AO_1 je překlopená AO_2 podle osy úhlu u A, což jsme chtěli dokázat.

[1] To znamená, že žádné tři neleží na jedné přímce.

[2] Viz `https://prase.cz/archive/36/uvod2s.pdf`.

[3] Viz `https://prase.cz/commentary/C/serie3s/uvod3s.pdf`.

Poznámka. Toto řešení dokonce ani nevyžaduje tvrzení o existenci kamaráda a toto tvrzení z něj plyne. Je to ale velmi netradiční způsob, jak jej dokázat :-).

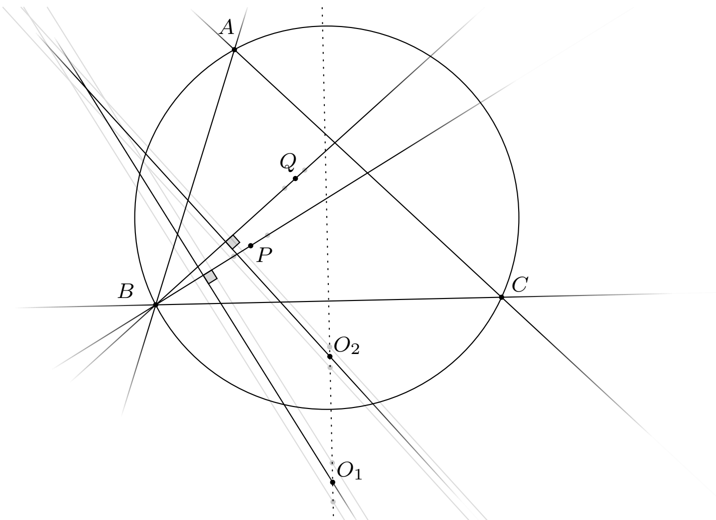


Řešení hýbáním s body. Začneme hýbat s P po BP. Všimneme si, že O_1 a O_2 leží na pevné přímce, na ose BC. Zobrazení $P \mapsto O_1$ je projektivní, protože ho dostaneme pomocí stejnolehlosti v B s koeficientem $\frac{1}{2}$ a následně promítnutím ve směru kolmém na BP. Zobrazení $P \mapsto Q$ je také projektivní, protože P, Q jsou kamarádi a hýbeme po přímce skrz vrchol (Q se hýbe po BQ). Takže i zobrazení $P \mapsto O_2$ je projektivní. Nakonec překlopíme AO_1 na AO_2 podle osy úhlu u A. Takže dostaneme dvě projektivní zobrazení $P \mapsto O_2$ takové, že pokud jsou shodná všude, tak platí úloha. Úloha tedy stačí ověřit pro tři pozice P (na libovolné dané přímce BP).

Když P leží na kružnici opsané ABC, pak je O_1 střed kružnice opsané ABC. Dále je Q nevlastní, neboť isogonály k přímkám AP, BP, CQ budou rovnoběžné. Z toho je O_2 nevlastní bod osy BC, neboli AO_2 je kolmice na BC. Protože O, H jsou kamarádi, tak v tomto případě O_1 a O_2 opravdu jsou isogonální v A. Analogicky když P je nevlastní.

Pro třetí případ zvolme P ležící na ose úhlu ACB. Pojďme tento případ znovu vyřešit hýbáním s body. Hýbejme s P po CP. Všimni si, že argumenty z předchozího odstavce i dva případy ze symetrií fungují úplně stejně. Jediný trik je ten, že nyní můžeme uvážit jako třetí případ P je vepsiště I. Potom $P = Q = I$ a $O_1 = O_2$, zbývá ukázat, že toto společné opsiště leží na ose úhlu. Z trojzubcového lemmatu pro Švrčkův bod se osy BI a CI protínají ve Švrčkově bodě. Takže $O_1 = O_2$ leží na ose BAC, takže je splněna úloha.

Z toho plyne, že kdykoli P leží na ose ACB, tak úloha platí. To znamená, že pro původní zadání můžeme opravdu zvolit třetí bod P ležící na ACB a celá úloha je tímto vyřešena.



Poznámky opravujícího. Většina přijatých řešení řešila úlohu následujícím pozorováním.

Pokud body X, Y ležící na ose BC jsou inverzy podle kružnice opsané ABC, potom $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle XAC|$.

Pro důkaz tohoto pozorování si dokresli průsečíky G, H přímky XY a kružnice opsané ABC. Pak najdi harmonickou čtveřici pomocí *dvě ze tří*. Z toho už pak lemma plyne jednoduše.

Zbytek řešení úlohy je pak už jen standardní úhlení a *ratio chasing* k dokázání, že opravdu O_1 a O_2 jsou svoje inverzy podle kružnice opsané.

(Radek Olšák)

Úloha N5. *Je dáno přirozené číslo k. Posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ definujme následovně: a_n, b_n jsou nesoudělná přirozená čísla a splňují*

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{n^k}.$$

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že $b_n > b_{n+1}$.

Řešení. Označme $L(n) = \operatorname{lcm}(1, \ldots, n)$. Když posčítáme

$$1 + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{n^k},$$

bude jmenovatelem nějaký dělitel čísla $L(n)^k$. Když se tedy budeme dívat jen na p-valuaci jmenovatele $v_p(b_n)$, bude tato valuace nejvýše rovna valuaci $L(n)^k$. Položme tedy $E_p(n) = v_p(L(n)^k)$ a říkejme tomuto *očekávaná p-valuace*. Řešení se pak bude skládat ze dvou částí. Zaprvé ukážeme, že existuje prvočíslo p takové, že pro nekonečně mnoho n není dosaženo očekávané p-valuace, tedy $v_p(b_n) < E_p(n)$. Zadruhé ukážeme, že kdyby posloupnost b_n byla od nějakého indexu neklesající, pak by pro každé prvočíslo p byla posloupnost $v_p(b_n)$ od nějakého indexu shodná s $E_p(n)$. To bude spor.

Uvažujme nyní libovolné prvočíslo p. Když v součtu definujícím $\frac{a_n}{b_n}$ rozšíříme výrazem $L(n)^k$, dostaneme

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{L(n)^k + \left(\frac{L(n)}{2}\right)^k + \cdots + \left(\frac{L(n)}{n}\right)^k}{L(n)^k}.$$

Platí $v_p(b_n) < E_p(n)$, právě když se v tomto zlomku zkrátí nějaká mocnina p. Nechť je p^m nejvyšší mocnina p mezi čísly $1, \ldots, n$ (neboli $m = v_p(L_n)$). Díváme-li se na čitatel mod p, pak všechny členy $\left(\frac{L(n)}{i}\right)^k$ pro $p^m \nmid i$ zmizí, neboť v $L(n)$ zbude nějaká mocnina p. Potom jsou-li $p^m, 2p^m, \ldots, \ell \cdot p^m$ násobky p^m menší nebo rovny n, pak je čitatel mod p kongruentní

$$\left(\frac{L(n)}{p^m}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{\ell^k}\right).$$

Položme nyní $n = p^m(p-1)$ (toto dodrží dosavadní definici m, vskutku bude $m = v_p(L(n))$ exponent nejvyšší mocniny p mezi $1, \ldots, n$). Činitel $\left(\frac{L(n)}{p^m}\right)^k$ je nesoudělný s p, takže jej pro potřeby nulovosti mod p lze ignorovat. Zároveň je $x \mapsto x^{-1}$ bijekce množiny nenulových zbytkových tříd mod p, takže chceme, aby

$$1 + 2^k + \cdots + (p-1)^k \equiv 0 \pmod{p}.$$

Nyní dokážeme, že výraz $1 + 2^k + \cdots + n^k$ je roven nějakému polynomu $P(n)$ s racionálními koeficienty pro každé n. Uvažme všechny polynomy $Q_j(n) = n^j - (n-1)^j$ pro $j \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ – ty mají stupně $0, 1, \ldots, k$. Položme

$$R(n) = a_{k+1}Q_{k+1}(n) + a_kQ_k(n) + \cdots + a_1Q_1(n)$$

pro zatím neurčená racionální $a_1, \ldots, a_{k+1}$. Našim cílem bude dosáhnout $R(n) = n^k$. Položíme $a_{k+1} = 1$, potom zvolíme a_k tak, abychom vynulovali koeficient u členu n^{k-1}, následně zvolíme a_{k-1} tak, abychom vynulovali koeficient u členu n^{k-2} (to funguje, neboť Q_j je vždy stupně $j-1$). Takto nakonec vynulujeme všechny koeficienty kromě toho u členu n^k. Nyní můžeme položit

$$P(n) = a_{k+1}n^{k+1} + \cdots + a_1n.$$

Pak platí $P(0) = 0$ a zároveň $P(n) - P(n-1) = R(n) = n^k$, z čehož už indukcí

$$P(n) = 1^k + 2^k + \ldots n^k$$

pro každé přirozené n, jak jsme chtěli. P má racionální koeficienty a nula je jeho kořenem, takže lze zapsat $P(n) = n \cdot \frac{P_0(n)}{d}$ pro nějaké přirozené d a polynom P_0 s celočíselnými koeficienty.

Nyní stačí zvolit prvočíslo p nesoudělné s d. Pro ně pak bude

$$1 + 2^k + \cdots + (p-1)^k \equiv 1 + 2^k + \cdots + p^k \equiv p \cdot \frac{P_0(p)}{d} \equiv 0 \pmod{p},$$

jak přesně chceme. Z toho pak tedy $v_p(b_n) < E_p(n)$ pro nekonečně mnoho indexů $n = p^m(p-1)$.

Nyní předpokládejme, že posloupnost b_n je od nějakého indexu N_0 neklesající (tedy $b_{n+1} \geq b_n$ pro $n \geq N_0$). Úplnou indukcí z toho vyvodíme, že pro každé prvočíslo p existuje N_p takové, že $v_p(b_n) = E_p(n)$ pro $n \geq N_p$.

Pro prvočíslo q snadno vyjádříme $v_q(b_{q^m}) = km = E_q(q^m)$, neboť po rozšíření výrazem $L(q^m)$ jsou všechny sčítance v čitateli až na jeden násobky q, takže se žádná mocnina q nezkrátí.

Valuace $v_q(b_n)$ se oproti $v_q(b_{n-1})$ může změnit jen tehdy, když $v_q(n^k) \geq v_q(b_{n-1})$ (opět rozšíříme a v případě $v_q(n^k) < v_q(b_{n-1})$ dostaneme v čitateli součet násobku q s číslem, které je s q nesoudělné). Mezi indexy $n = q^m$ a $n = q^{m+1}$ (kde už zase bude $v_q(b_n) = E_q(n)$) by tedy valuace $v_q(b_n)$ mohla poprvé klesnout jen na indexech $n = \ell \cdot q^m$ pro $q \in \{2, \ldots, q-1\}$. Pokud ale předpokládáme, že

$$q^m > N_0, N_p$$

pro všechna prvočísla $p < q$, tj. že se celá tato situace odehrává na dost vysokých indexech na to, aby už byla posloupnost b_n neklesající a všechny posloupnosti $v_p(b_n)$ pro $p < q$ se (z indukčního předpokladu) shodovaly s $E_p(n)$ (a tedy byly neklesající), tak je to spor, neboť valuace $v_q(b_n)$ klesla, valuace $v_p(b_n)$ neklesly pro $p < q$ a pro $p > q$ se valuace $v_p(b_n)$ nezměnily, protože tato prvočísla nedělí $n = \ell \cdot q^m$. Přitom ale b_n neměla klesnout, což je spor. Tudíž $v_q(b_n)$ bude totožná s $E_q(n)$ pro všechna $q^m \leq n < q^{m+1}$, takže můžeme položit třeba $N_q = q^m$ a máme hotový indukční krok, čímž celé dokazované tvrzení platí.

Dohromady s druhou částí je toto spor, takže b_n nemůže být od žádného indexu neklesající.

Poznámky opravujícího. Došla dvě řešení, která sdílela myšlenky jako koukat se na indexy $n = p(p-1) - 1$ nebo říct něco o sumě k-tých mocnin mod p. Ani jedno svůj postup nedovedlo ke zcela zdárnému závěru, leč z obou alespoň plynulo řešení v případě $k = 1$.

Poznamenejme, že v první části lze fakt, že kongruence

$$1 + 2^k + \cdots + (p-1)^k \equiv 0 \pmod{p}$$

platí pro všechna prvočísla p kromě konečně mnoha, dokázat např. i pomocí primitivního prvku. To nám dokonce přesně řekne, která prvočísla jsou výjimkami z této kongruence – jsou to právě ta, pro něž $p - 1 \mid k$. *(Matěj Doležálek)*