TR iKS ko

Úloha 1. *Ukaž, že pro jakýchkoli* 5 *bodů na sféře umíme najít uzavřenou hemisféru která obsahuje alespoň* 4 *z nich*

Řešení. Vezmeme libovolné dva z nich. Ty budou vždy ležet na nějaké hlavní kružnici[1] sféry který bude oddělovat dvě hemisféry, pak v jedné z nich budou alespoň 2 ze zbylých bodů a jsme hotovi.

□

Úloha 2. *V množině polynomů M je polynom $p(x) = x$, a kdykoli je v množině M polynom $p(x)$, pak jsou tam i polynomy $xp(x)$ a $x+(1-x)p(x)$. Nic jiného v ní není. Ukaž, že kdykoli pro dva polynomy, $p, q \in M$ existuje $0 < x < 1$ že $p(x) = q(x)$, pak se polynomy p, q rovnají.*

Řešení. Pro jednoduchost budeme polynomy uvažovat pouze na intervalu $0 < x < 1$, a kdykoli budeme mluvit o polynomu, myslíme tím polynom z M. Pokud se p a q rovnají, pak tvrzení platí. V opačném případě nám tvrzení říká, že jsme schopní polynomy uspořádat tak, že pro každé dva polynomy p, q buď $p(x) > q(x)$ nebo $p(x) < q(x)$ pro všechna uvažovaná x, zkráceně budeme psát jenom třeba $p < q$.

Všimneme si, že pro každý polynom platí $0 < p(x) < 1$. To dokážeme indukcí. Pro identický polynom tvrzení platí. Pro indukční krok máme $0 < xp(x) < p(x) < x + (1-x)p(x) = x + p(x) - xp(x) = x(1-p(x)) + p(x) < 1 \cdot (1-p(x)) + p(x) = 1$.

Každý polynom vznikl postupnou aplikací následně značených pravidel $\ominus : p(x) \to xp(x)$ a $\oplus : p(x) \to x + (1-x)p(x)$.

Pro libovolné dva polynomy p, q platí $\ominus p < (f(x) = x) < \oplus q$, tedy po aplikaci pravidla $\oplus$ bude polynom větší než identita, a naopak po aplikaci $\ominus$ bude menší. Zřejmě také $\ominus p < p < \oplus p$

Teď už je hledané uspořádání patrné. Každý polynom vznikl jako nějaká aplikace $\oplus$ a $\ominus$ na identitu. Stačí nám je tedy reprezentovat jako sekvenci těchto aplikací, například $[\oplus, \ominus, \ominus, \ominus]$ značí trojnásobnou aplikaci $\ominus$ a následně jednu aplikace $\oplus$ a poté je porovnávat lexikograficky, kde $\ominus <$ konec sekvence $< \oplus$. □

Úloha 3. *Trojúhelník má strany a, b, c. Poloměr kružnice vepsané je r, a označme $s = (a+b+c)/2$. Ukaž, že*

$$\frac{1}{(s-a)^2} + \frac{1}{(s-b)^2} + \frac{1}{(s-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}.$$

[1] Analogie průměru pro kružnici

Řešení. Nechť $A = s - a$, analogicky B, C. Pak $(A - B)^2 \geq 0$, tedy $\frac{2}{AB} \leq \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}$. Obdobně pro ostatní dvojice, dohromady to dá

$$\frac{A+B+C}{ABC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} \leq \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2}. \tag{1}$$

Heronův vzorec tvrdí, že pro obsah trojúhelníka platí:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{sABC}.$$

Obsah trojúhelníka ale můžeme spočítat i jako $S = rs$, z čehož máme $r^2 s = ABC$, ale $s = A + B + C$, tedy

$$\frac{1}{r^2} = \frac{A+B+C}{ABC} \leq \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2},$$

a jsme hotovi.

□

Úloha 4. *Máme přirozená čísla m, n, $m \leq n$. Označme d jejich největšího společného dělitele. Kombinační číslo je definováno následovně[2]:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ukaž, že

$$\frac{d}{n}\binom{n}{m} \tag{2}$$

je celé číslo.

Řešení. Největší společný dělitel d je celočíselná kombinace m, n, existují[3] tedy celá a, b tak že $d = am + bn$. Teď už vyjádříme 2 jako součet celých čísel.

$$\begin{aligned} \frac{d}{n}\binom{n}{m} &= \frac{am+bn}{n}\binom{n}{m} \\ &= a\frac{m}{n}\frac{n!}{m!(n-m)!} + b\binom{n}{m} \\ &= a\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + b\binom{n}{m} \\ &= a\binom{n-1}{m-1} + b\binom{n}{m} \end{aligned} \tag{3}$$

□

[2] všimni si, že je to vždy celé číslo, kde $a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a$ je faktoriál.
[3] Bézoutova rovnost, případně Euklidův algoritmus.