Zadanie 6. série

Termín odoslania: 28. januára 2019

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha N6. Nájdite všetky neprázdne konečné množiny prirodzených čísel M také, že ak $m, n \in M$ a ℓ je ich najväčší spoločný deliteľ, tak

$$\frac{m+n}{\ell} \in M.$$

Úloha A6. Majme postupnosť $S_1 = 1, S_{n+1} = \frac{(2+S_n)^2}{4+S_n}$. Ak $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, dokážte nerovnosť $a_n \geq \frac{4}{\sqrt{9n+7}}$.

Úloha G6. Je daný trojuholník ABC s vpísanou kružnicou ω. Jeho A-pripísaná kružnica sa dotýka strany BC v bode A'. Nech X je bod na úsečke AA' taký, že úsečka XA' nemá s ω žiadny spoločný bod. Dotyčnice k ω z X pretínajú BC v bodoch Y, Z. Dokážte, že hodnota výrazu $|XZ| + |XY|$ nezávisí na voľbe bodu X.

Úloha C6. Pavel našiel n bodov v priestore, pre ktoré platí, že žiadne štyri neležia v jednej rovine. Každý bod je buď červený alebo modrý. Zároveň si všimol, že $n-1$ dvojíc bodov je spojených povrázkami, pričom povrázok vždy spája dva body rôznej farby a povrázky nikde netvoria cyklus. Pretože sa Pavel nudil, rozhodol sa zahrať si nasledujúcu hru: vždy nájde štvoricu bodov A, B, C, D, pre ktoré platí, že A je červený a dvojice AB, BC a CD sú spojené povrázkom, a naviac platí $|AB| + |CD| > |BC| + |AD|$. Potom rozpojí dvojicu AB, ale zase spojí dvojicu AD. Existuje situácia, kedy toto mohol robiť nekonečne dlho?