Zadání 5. série

Termín odeslání: 18. prosinec 2024

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Email pro dotazy: `info@iksko.org`

Úloha G5. Nechť K je středem těžnice AM trojúhelníku ABC. Body X, Y leží postupně na přímkách AB a AC tak, že $|\angle KXM| = |\angle ACB|$, $|AX| > |BX|$ a podobně $|\angle KYM| = |\angle ABC|$, $|AY| > |CY|$. Dokažte, že body B, C, X, Y leží na kružnici.

Úloha A5. Nechť $b_1, \ldots, b_n$ jsou nezáporná reálná čísla se součtem 2 a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla taková, že $a_0 = a_n = 0$ a $|a_i - a_{i-1}| \le b_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Dokažte, že

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i-1}) b_i \le 2.$$

Úloha N5. Najděte všechny dvojice kladných celých čísel $m \ge n$ takové, že $9^{m-n} + 3^{m-n} + 1$ je dělitelné současně m a n.

Úloha C5. Je dána úsečka s n body včetně krajních, a Alicka se zavázanýma očima stojí na jednom z nich. Body jsou označeny kladnými celými čísly od 1 do n, ne nutně v pořadí. V každém kroku jí Džavo sdělí, zda se nachází v jednom z krajních bodů, nebo ne. Pokud je na kraji, tak se musí přesunout do jediného sousedního bodu. Pokud není v krajním bodě, může si vybrat, zda se chce přesunout do sousedního bodu s nižším nebo vyšším číslem (neví, kterým směrem se posune).

Jediné informace, které má Alicka po k krocích hry, jsou: ve kterých krocích byla na kraji a jakou volbu učinila v každém kroku. Existuje strategie, pomocí níž může Alicka v konečném počtu kroků určit, kolik bodů je na úsečce?