Riešenia 2. série

Úloha N2. *Nájdite všetky funkcie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *také, že pre všetky* $m, n \in \mathbb{N}$ *platí:*

$$f(mn) = [m, n](f(m), f(n))$$

kde $[x, y]$*, resp.* (x, y) *označuje najmenší spoločný násobok, resp. najväčší spoločný deliteľ* x, y*.*

Riešenie. Dosaďme $[m, 1]$. Dostaneme:

$$f(m) = [m, 1](f(m), f(1)) = m(f(m), f(1))$$

Z toho vyplýva $m|f(m)$ a $f(m) \leq mf(1)$ ($(a, b) \leq a$).

Označme si $f(1) = c$ ($f(1)$ je pre danú funkciu konštanta). Ďalej dosaďme $[1, mc]$:

$$f(mc) = [1, mc](f(1), f(mc)) = mc \cdot c = mc^2 \qquad \text{(lebo } f(1)|f(mc))$$

Ako veľké finále dosaďme $[m, mc]$:

$$f(m^2c) = [m, mc](f(m), f(mc))$$
$$m^2c^2 = mc(f(m), f(mc))$$
$$mc = (f(m), f(mc))$$

Z posledného vyplýva $f(m) \geq mf(1)$ (lebo opäť $(a, b) \leq a$). Spolu s $f(m) \leq mf(1)$ to dáva, že nutne musí platiť $f(m) = mf(1)$. Dosadením do pôvodnej rovnice (a za využitia vzťahu $(a, b)[a, b] = ab$) zitíme, že každá rovnica tvaru $f(m) = mc$, kde $c \in \mathbb{N}$, vyhovuje.

(Miro Psota)

Úloha C2. *Patrik sa hral so štvorcovými mriežkami, v ktorých bolo každé políčko biele alebo čierne. Uvedomil si, že niektoré sa mu zdajú krajšie ako iné a tiež, že niektoré sú zaujímavejšie ako iné. Mriežku* $m \times n$ *nazýva peknou, ak pre každé dva riadky platí, že najviac v jednom stĺpci majú oba čierne políčko. Ďalej mriežku nazýva zaujímavou, ak je pekná, no po zafarbení ľubovoľného bieleho štvorčeka načierno takou nebude. Aký najmenší počet čiernych políčok môže byť v zaujímavej mriežke ?*

Riešenie. Zrejme v zaujímavej mriežke je v každom riadku aspoň jedno čierne políčko. Ak by totiž nebolo, zafarbením ľubovoľného políčka z tohto riadka nevzniknú 2 riadky, ktoré majú v 2 stĺpcoch čierne políčka. Taktiež si uvedomíme, že stĺpce a riadky môžeme ľubovoľne presúvať a peknosť tabuľky (a teda ani zaujímavosť) to neovplyvní.

Zoberme si prvý riadok zaujímavej mriežky a označme c počet čiernych políčok v ňom. BUNV nech sú v prvých c stĺpcoch. Vieme, že po zafarbení hociktorého políčka tohto riadku mriežka nebude pekná. To znamená, že pre ľubovoľný z posledných $n - c$ stĺpcov v nej existuje riadok, ktorý má čierne políčka v tomto stĺpci a v jednom s prvých c stĺpcov. Tento riadok nazveme *výnimočný* pre tento stĺpec.

Zjavne ak je v riadku x čiernych políčok, môže byť výnimočný pre najviac $x - 1$ stĺpcov. (Lebo aby bol pre aspoň jeden musí jedno čierne byť v prvých c stĺpoch). A v riadku je aspoň jedno čierne políčko, teda prípad $x = 0$ nenastane. To znamená, že ak je v zvyšných $m - 1$ riadkoch spolu X čiernych políčok, dokopy sú výnimočné pre najviac $X - m + 1$ stĺpcov. Zrejme $X - m - 1 \geq n - c$ (keďže každý z $n - c$ stĺpcov má svoj výnimočný riadok).

Avšak my vieme, že v našej zaujímavej mriežke je $c + X \geq c + (m - 1 + n - c) = m + n - 1$ čiernych políčok.

A ak zoberieme mriežku, v ktorej je čierny prvý riadok a prvý stĺpec, tak je zaujímavá a má $m + n - 1$ čiernych políčok. Preto najmenší možný počet čiernych políčok v zaujímavej mriežke je $m + n - 1$.

Iné riešenie (Podľa *Františka Coufa*)

Mriežku si predstavíme ako bipartitný graf, kde vrcholy sú riadky a stĺpce, a hrana vedie medzi vrchlomi ak v danom riadku a stĺpci je čierne políčko.

Uvedomíme si, že mriežka je pekná, ak žiadne 2 vrcholy nemajú 2 spoločných susedov, čo znamená, že v grafe nie je kružnica dĺžky 4.

Ak graf nie je súvislý, tak pridaním hrany medzi 2 jeho komponenty nevznikne žiadna kružnica (a teda ani kružnica veľkosti 4). Preto graf zaujímavej mriežky je súvislý. No z toho hneď máme, že je v ňom aspoň $m + n - 1$ hrán, keďže má $m + n$ vrcholov.

Poznámky opravovateľa. Úloha nebola ťažká, a možno najťažšia časť bola pochopenie zadania, že ktoré mriežky sú zaujímavé. Upozornil by som, že tvrdenie (a aj vzorák) platí aj v prípade, že $m = 1$ alebo $n = 1$. Vtedy je síce každá mriežka pekná, no celá čierna má vlastnosť, že po zafarbení ľubovoľného štvorčeka nabielo pekná nebude, keďže v nej žiadny biely štvorček nie je. Tentokrát som za to body nestrhával, no nabudúce si dávajte pozor.

(Martin „Vodka“ Vodička)

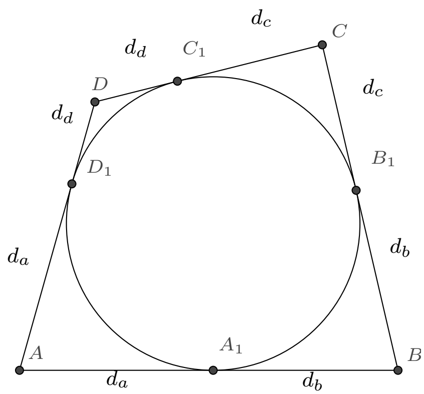
Úloha G2. *Nech ABC je trojuholník so stredom vpísanej kružnice I. Nech D, E, F sú body dotyku vpísanej kružnice so stranami BC, AC, AB. Nech k, l sú kružnice vpísané do štvoruholníkov $BDIF$, $CEID$. Dokážte, že jedna zo spoločných dotyčníc kružníc k, l prechádza bodom A.*

Riešenie. Predtým, než sa pustíme do našej úlohy, povieme si niečo o technike známej ako *equal tangents.* V skutočnosti ide o tvrdenie, že keď z bodu A vedieme dotyčnice ku kružnici, ktorej sa dotýkajú v bodoch X, Y, tak potom $|AX| = |AY|$. Použitím tohto zrejmého tvrdenia sa dá dokázať známe tvrdenie, že *konvexný* štvoruholník $ABCD$ je dotyčnicový práve vtedy, keď

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|.$$

Nech je štvoruholník $ABCD$ dotyčnicový. Príslušné dotykové body označme A_1, B_1, C_1, D_1 (obr. 1). Potom platí $|AA_1| = |AD_1| = d_a$, analogicky definujeme d_b, d_c, d_d. Potom zrejme platí

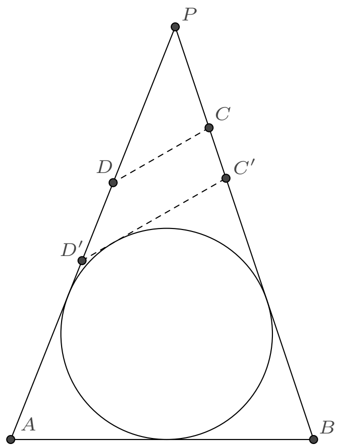
$$|AB| + |CD| = d_a + d_b + d_c + d_d = |BC| + |AD|.$$



obr. 1

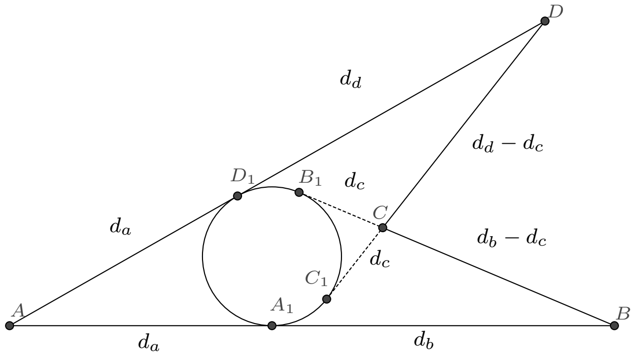
Nech naopak platí vzťah
$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$$
Ak má štvoruholník $ABCD$ dve dvojice rovnobežných strán tak je to rovnobežník a podľa tohto vzťahu je to kosoštvorec alebo štvorec a tomu zrejme ide vpísať kružnica.

BUNV teda predpoklajme, že $AD \nparallel BC$ a že polpriamky AD, BC sa pretínajú v bode P. Uvážme kružnicu k, ktorá leží v polrovine ABC a dotýka sa priamok AB, BC, AD. Nech t je dotyčnica ku k taká, že $t \parallel CD$ a t pretína polpriamky AD, BC v bodoch D', C'. Podľa dokázaného vzťahu platí
$$|AB| + |C'D'| = |BC'| + |AD'|$$
Platí teda
$$(|C'D'| - |CD|) + (|AD| - |AD'|) + (|BC| - |BC'|) = 0$$
Zrejme však platí, že všetky výrazy v zátvorkách na ľavej strane majú rovnaké znamienko, čo platí z rovnoľahlosti so stredom v priesečníku polpriamok AD, BC (obr. 2), ktorý podľa predpokladu existuje. Preto musí nutne byť $C' \equiv C$ a $D' \equiv D$ a nakoľko štvoruholník $ABC'D'$ je dotyčnicový, tak ním je aj štvoruholník $ABCD$, čo bolo treba dokázať.



obr. 2

Úplne sme teda dokázali známe kritérium dotyčnicovosti konvexného štvoruholníka. Menej známe je však to, že niečo podobné platí aj pre nekonvexný štvoruholník. V našom prípade sa stačí zaoberať štvoruholníkom $ABCD$, v ktorom sa žiadne dve strany nepretínajú v bode rôznom od vrcholu. Potom jeden jeho vrchol leží v trojuholníku tvoreného troma ostatnými, BUNV nech je to bod C. Definujeme si kružnicu vpísanú tomuto štvoruholníku ako kružnicu takú, že sa dotýka úsečiek AB, AD a priamok CB, CD. Nie je ťažké si rozmyslieť, že potom sa nedotýka úsečiek CB, CD. Analogicky ako v predošlom tvrdení si definujeme d_a, d_b, d_c, d_d. Potom nie je ťažké vyplniť hodnoty dĺžok ako na obr. 3.



obr. 3

Vidíme, že

$$|AB| + |CD| = d_a + d_b + d_d - d_c = |BC| + |AD|$$

V tejto chvíli by sme sa ešte mohli zamyslieť nad platnosťou obrátenej implikácie, v skutočnosti je to však veľmi podobné predšlému prípadu a navyše to k vyriešeniu úlohy ani nebudeme potrebovať. Vyzbrojený týmito dvoma tvrdeniami je tak netriviálne vyzerajúca úloha triviálna.

Vezmime si najprv prípad, keď $|AB| = |AC|$. V tomto prípade je priamka ID spoločnou dotyčnicou kružníc k, l a táto priamka zrejme prechádza bodom A. Predpokladajme ďalej $|AB| \neq |AC|$.

Potom kružnice k, l ležia v opačných polrovinách vzhľadom k priamke ID. V práve jednej z nich leží bod A, BUNV nech je to polrovina IDB. Potom úsečka AD nepretína kružnicu l. Dotyčnica z bodu A rôzna od AC pretína polpriamku ID v nejakom bode P. Štvoruholník $APDC$ je nekonvexný tak, že P leží vnútri trojuholníka ACD a podľa našej definície mu je možné vpísať kružnicu. Platí teda vzťah

$$|AC| + |PD| = |AP| + |CD|$$

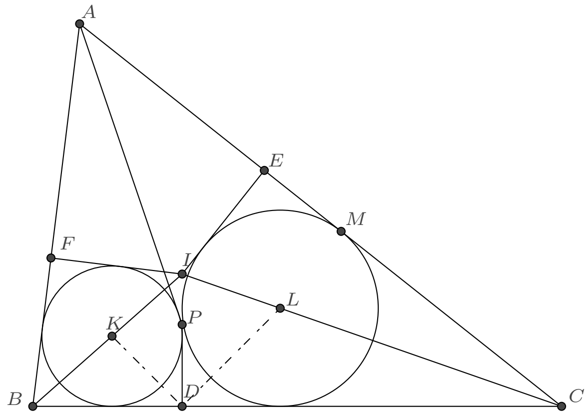
Našim cieľom je dokázať vzťah

$$|AB| + |PD| = |AP| + |BD|$$

vďaka čomu bude konvexný štvoruholník $ABDP$ dotyčnicový, kružnica jemu vpísaná bude k a priamka AP bude teda spoločnou dotyčnicou kružníc k, l. Vidíme, že na dôkaz tohto vzťahu stačí dokázať

$$|AC| - |CD| = |AB| - |BD|$$

To už je veľmi ľahké. Nakoľko $|CD| = |CE|$, $|BD| = |BF|$, tak oba tieto rozdiely sú rovné $|AE|$, resp. $|AF|$, pričom zrejme platí aj $|AE| = |AF|$. Tvrdenie je teda úplne dokázané.



obr. 4

Iné riešenie. Ukážeme, že úlohu je možné priamočiaro vyriešiť aj celkom pekným upočítaním. Označme K, L stredy kružníc k, l. Zrejme ležia na úsečkách BI, CI. Nech k' je obraz priamky AB v osovej súmernosti podľa AK. Analogicky definujeme l'. Zrejme k', l' sú dotyčnice ku kružniciam k, l rôzne od AB, AC. Našim cieľom je dokázať $k' = l'$, k čomu stačí dokázať $2 \cdot \angle BAK + 2 \cdot \angle CAL = \alpha$. Na dôkaz tohto stačí dokázať, že $\angle BAK = \angle CAI - \angle CAL = \angle IAL$. Toto dokážeme tak, že dokážeme

$$\frac{\sin \angle BAK}{\sin \angle KAI} = \frac{\sin \angle IAL}{\sin \angle LAC}$$

Platí totiž, že $\angle KAI = \frac{\alpha}{2} - \angle BAK$, $\angle IAL = \frac{\alpha}{2} - \angle CAL$ a funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - x\right)}$ je na intervale $\left(0, \frac{\alpha}{2}\right)$ rastúca a teda prostá. Táto funkcia je rastúca, lebo je podielom rastúcej a klesajúcej funkcie na danom intervale (ktorý je zrejme podintervalom $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$). Z vyššie uvedeného vzťahu už teda bude plynúť $\angle BAK = \angle IAL$. Teraz použitím niekoľko sínusových viet a vety o ose uhla pre trojuholník BDI a os DK hľadaný pomer sínusov ľahko prevedieme na uhly trouholníka ABC:

$$\frac{\sin \angle BAK}{\sin \angle KAI} = \frac{BK \cdot \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{AK}}{KI \cdot \frac{\sin\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right)}{AK}} = \frac{BK}{KI} \cdot \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{BD}{DI} \cdot \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

A to už sme hotový, nakoľko analogicky musí platiť

$$\frac{\sin \angle LAC}{\sin \angle IAL} = \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

čo je v podstate to, čo sme chceli.

Poznámky opravovateľa.

Úlohu vyriešili traja riešitelia. Dvaja tvrdenie dokázali podobne ako v druhom riešení cez trigonometrické upočítanie, ďalší najprv nahliadol, že stačí dokázať, že obraz bodu A v osovej súmernosti podľa KL leží na ID, čo dokázal pomerne priamočiaro analyticky. Nikto nepoužil *equal tangets*, aj keď sa to v úlohe s toľkými dotykmi žiada. Úloha je v tomto smere veľmi poučná, veľmi ťažko vyzerajúce tvrdenie s dotyčnicami môže byť v skutočnosti veľmi jednoduché.

(Patrik Bak)

Úloha A2. *Nech $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$, sú reálne čísla spĺňajúce*

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i = \sum_{i=1}^{n} iy_i$$

Dokážte, že pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i[i\alpha] \geq \sum_{i=1}^{n} y_i[i\alpha]$$

kde $[x]$ označuje najväčšie celé číslo neprevyšujúce x.

Riešenie. Na začiatok si dokážeme pár pomocných tvrdení:

Lema 1 Nech $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sú reálne čísla, také, že pre všetky $1 \leq k < n$ platí $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i$, a tiež $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$.
Potom $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq \sum_{i=1}^{n} b_i x_i, \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i y_i$

Dôkaz: Z nerovností $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ je to intuitívne jasné. Formálny dôkaz nechávame čitateľovi.

Lema 2 Nech $\alpha \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}, n > k$. Potom $\frac{2\sum_{i=1}^{k}[i\alpha]}{k(k+1)} \leq \frac{[n\alpha]}{n}$.

Dôkaz: Indukciou na $n-k$.

1. krok: $n = k+1$:

$$\frac{2\sum_{i=1}^{k}[k\alpha]}{k(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{k}[i\alpha] + [(k+1-i)\alpha]}{k(k+1)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{k}[i\alpha + (k+1-i)\alpha]}{k(k+1)} = \frac{[(k+1)\alpha]}{k+1}$$

Využili sme pri tom známu nerovnosť $[a] + [b] \leq [a+b]$

2.krok: Nech to platí pre všetky menšie rozdiely ako $n-k$. Potom

$$\frac{2\sum_{i=1}^{k}[i\alpha]}{k(k+1)} = \frac{2\sum_{i=1}^{k}[i\alpha](1+\frac{2}{k})}{(k+2)(k+1)} \leq \frac{2\sum_{i=1}^{k+1}[i\alpha]}{(k+2)(k+1)} \leq \frac{[n\alpha]}{n}$$

Využili sme pri tom nerovnosť $\frac{2\sum_{i=1}^{k}[k\alpha]}{k} \leq [(k+1)\alpha]$, ktorú sme dokázali v prvom kroku a potom sme použili indukčný predpoklad pre čísla $k+1, n$, lebo zjavne $n-(k+1) < n-k$, a $n > k+1$, keďže rozdiel 1 sme vybavili v prvom kroku.

Lema 3 Pre ľubovoľné prirodzené čísla $n \geq k$ a reálne číslo α platí:

$$n(n+1)\sum_{i=1}^{k}[i\alpha] \leq k(k+1)\sum_{i=1}^{n}[i\alpha]$$

Dôkaz: Indukciou na n:

1. krok: Pre $n = k$ nerovnosť triviálne platí, dokonca nastáva rovnosť.
2. krok: Nech to platí pre $n - 1$. Ukážem, že to platí pre n. Z indukčného predpokladu platí:

$$n(n-1)\sum_{i=1}^{k}[i\alpha] \le k(k+1)\sum_{i=1}^{n-1}[i\alpha]$$

A z Lemy 2 zase platí, že

$$2n\sum_{i=1}^{k}[i\alpha] \le k(k+1)[n\alpha]$$

Sčítaním týchto dvoch nerobností dostaneme

$$n(n-1)\sum_{i=1}^{k}[i\alpha] + 2n\sum_{i=1}^{k}[i\alpha] \le k(k+1)\sum_{i=1}^{n-1}[i\alpha] + k(k+1)[n\alpha]$$

$$n(n+1)\sum_{i=1}^{k}[i\alpha] \le k(k+1)\sum_{i=1}^{n}[i\alpha]$$

čo sme chceli dokázať.

A teraz môžeme pristúpiť k dôkazu nerovnosti zo zadania. Najprv si dokážeme nerovnosť

$$n(n+1)\sum_{i=1}^{n}x_i[i\alpha] \ge 2\sum_{i=1}^{n}[i\alpha]\sum_{i=1}^{n}ix_i$$

Podľa Lemy 1 nám stačí ukázať, že pre všetky $1 \le k < n$ platí,

$$n(n+1)\sum_{i=1}^{k}[i\alpha] \le 2\sum_{i=1}^{n}[i\alpha]\sum_{i=1}^{k}i = k(k+1)\sum_{i=1}^{n}[i\alpha]$$

a tiež že

$$n(n+1)\sum_{i=1}^{n}[i\alpha] = 2\sum_{i=1}^{n}[i\alpha]\sum_{i=1}^{n}i$$

Ale platnosť nerovnosti nám zaručuje Lema 3, a tá rovnosť je zrejmá.

Úplne analogicky môžeme dokázať

$$n(n+1)\sum_{i=1}^{n}y_i[i\alpha] \le 2\sum_{i=1}^{n}[i\alpha]\sum_{i=1}^{n}iy_i$$

Zložením posledných 2 nerovností a využitím podmienky $\sum_{i=1}^{n} iy_i = \sum_{i=1}^{n} ix_i$ dostaneme

$$n(n+1)\sum_{i=1}^{n}x_i[i\alpha] \ge n(n+1)\sum_{i=1}^{n}y_i[i\alpha]$$

A to keď predelíme výrazom $n(n+1)$ dostaneme nerovnosť, ktorú sme chceli dokázať.

Poznámky opravovateľa. Úlohu nikto nevyriešil, a tak sa môže zdať, že bola ťažká. Treba si všimnúť, že v riešení sa nevyužívalo vôbec nič a aj na celé časti stačil vzťah $[a] + [b] \le [a + b]$. Čo bolo ťažké, je po prvé vstrebať dlhé zadanie a pustiť sa do úlohy. Potom už stačilo spraviť hoci veľa, ale za to celkom jednoduchých krokov. Najprv sa celkom prirodzene do stredu nerovnosti vsunul výraz z podmienky zadania (samozrejme vhodne prenásobený),aby sa to rozbilo na nerovnosť len v x_i (resp.y_i). Potom si stačilo uvedomiť Lemu 1, čím sme sa úplne zbavili členov x_i. Už stačilo len dokázať Lemu 3 a vidno, že priamočiary postup indukciou fungoval, akurát sme potrebovali, aby platila Lema 2. A tá je len o hraní sa s celými časťami, a využívaním vzťahu $[a] + [b] \leq [a + b]$. Najjednoduchšia (asi) bola opäť indukcia, no podľa mňa to už bolo celkom jednoduché tvrdenie.

Teda podstatné je nebáť sa úlohy a nebyť znechutený, ak niečo urobím a úloha ešte stále nie je vyriešená. Treba ísť ďalej a ďalej a časom to padne.

(Martin „Vodka“ Vodička)