TR*i*KSko

Úloha 1. *Ukaž, že pro jakýchkoli* 5 *bodů na sféře umíme najít uzavřenou hemisféru která obsahuje alespoň* 4 *z nich*

Úloha 2. *V množině polynomů* M *je polynom* $p(x) = x$*, a kdykoli je v množině* M *polynom* $p(x)$*, pak jsou tam i polynomy* $xp(x)$ *a* $x+(1-x)p(x)$*. Nic jiného v ní není. Ukaž, že kdykoli pro dva polynomy,* $p, q \in M$ *existuje* $0 < x < 1$ *že* $p(x) = q(x)$*, pak se polynomy* p, q *rovnají.*

Úloha 3. *Trojúhelník má strany* a*,* b*,* c*. Poloměr kružnice vepsané je* r*, a označme* $s = (a+b+c)/2$*. Ukaž, že*

$$\frac{1}{(s-a)^2} + \frac{1}{(s-b)^2} + \frac{1}{(s-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}.$$

Úloha 4. *Máme přirozená čísla* m*,* n*,* $m \leq n$*. Označme* d *jejich největšího společného dělitele. Kombinační číslo je definováno následovně*[1]*:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ukaž, že

$$\frac{d}{n}\binom{n}{m} \tag{1}$$

je celé číslo.

[1] všimni si, že je to vždy celé číslo, kde $a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a$ je faktoriál.