Řešení 1. série

Úloha N1. *Množina M racionálních čísel splňuje*

(i) $0 \in M$,

(ii) *kdykoli* $x \in M$, *tak i* $x+1 \in M$ *a* $x-1 \in M$,

(iii) *kdykoli* $x \in M \setminus \{0,1\}$, *tak* $\frac{1}{x(x-1)} \in M$.

Musí být M už nutně množina všech racionálních čísel?

Řešení. Ukážeme, že množina M všech racionálních čísel bez čísel tvaru $3/5+n$, kde n je libovolné celé číslo, splňuje podmínky zadání. Označme $S = \{3/5+n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, tedy platí $M = \mathbb{Q} \setminus S$. Zřejmě 0 náleží do M, takže je splněna první podmínka.

Pokud m náleží do M, potom $m+1$ a $m-1$ jsou jistě racionální čísla. Pokud by ale jedno náleželo S, pak existuje n, že $m \pm 1 = 3/5+n \Rightarrow m = 3/5+(n \mp 1) \in S$, což je spor s tím, že m náleží do M. Tím je zaručena platnost druhé podmínky.

Zbývá ověřit, že pokud m je prvkem M, poté i číslo $1/(m(m-1))$ je prvkem M. Číslo m je racionální, můžeme jej tedy zapsat v základním tvaru jako a/b. Potom dostaneme

$$\frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{\frac{a}{b}(\frac{a}{b}-1)} = \frac{b^2}{a(a-b)}.$$

Předpokládejme nyní pro spor, že existuje n, pro které platí $b^2/(a(a-b)) = 3/5+n = (3+5n)/5$. Protože $\mathrm{nsd}(a,b) = \mathrm{nsd}(b,a-b) = 1$, čísla b^2 a $a(a-b)$ jsou nesoudělná, stejně jako čísla $3+5n$ a 5. Oba zlomky jsou tedy v základním tvaru (až na znaménko ve jmenovateli), porovním čítatelů dostáváme $b^2 = \pm(3+5n)$. Číslo b^2 tedy dává zbytek 2 nebo 3 po dělení pěti, což je ale nemožné, neboť 2 ani 3 nejsou kvadratickými zbytky modulo pěti. Tím dospíváme ke sporu, takže množina M splňuje i třetí podmínku. Vidíme, že množina splňující podmínky ze zadání nemusí být nutně množina racionálních čísel.

Poznámky opravujícího. Úloha se dala řešit ještě jiným způsobem: uvážíme všechny zlomky se jmenovatelem[1] 47 vytvořené pomocí podmínky (iii) a uvědomíme si, že máme nejvýše 8 možností, jaký zbytek může po dělení 47 dávat čitatel. Za menší nepřesnosti občas spojené s matoucími formulacemi jsme strhávali jeden bod. Větším prohřeškem bylo chybějící ověření skutečnosti, že zlomek může mít záporného čitatele, za což jsme strhávali 3 body – Marko Puza se svými 3/5 to zapomněl obhájit, Anh Dung Le s 3/7 by to už nezvládl pomocí kvadratických zbytků a Markétě Calábkové s 2/3 by se to nemohlo podařit ani jinak, neboť číslo 2/3 množina M vždy obsahuje. Chyba to ale byla vlastně stejná, až na konstantu.

(Pepa Svoboda & Michael „Majkl“ Bílý)

Úloha C1. *V kruhu je rozmístěno několik krabic. V každé z nich může být nějaký počet míčků, případně může být krabice prázdná. Pavel chodí po směru pohybu hodinových ručiček a pokaždé, když se mu nějaká krabice začne líbit, vytáhne z ní všechny míčky a počínaje od následující krabice dává po jednom míčku do každé krabice, okolo které prochází.*

(a) *Dokažte, že pokud se Pavlovi líbí pokaždé ta krabice, do které naposledy vložil míček, tak bude rozmístění míčků časem stejné jako jejich počáteční rozmístění.*

(b) *Dokažte, že Pavel umí vhodnými sympatiemi ke krabicím zařídit, aby se rozmístění míčků v krabicích změnilo na jakékoliv jiné se stejným celkovým počtem míčků.*

[1] Slovenští řešitelé zřejmě neznají jiná prvočísla.

Řešení. (a) Pavlovo sebrání míčků z jedné krabice a následné naházení míčků do dalších krabic nazvěme tahem. Pokud známe krabici, do které Pavel hodil míček jako poslední a počty míčků v krabicích po tahu, dokážeme zpětně zrekonstruovat celý tah (tedy i počty míčků před tahem). Stačí jít v opačném směru a sbírat míčky, než narazíme na prázdnou krabici, a jakmile se tak stane, tak do ní dáme všechny sesbírané míčky. V tomto zpětném tahu jsme nemohli jít dál, protože jinak by musela být krabice prázdná po Pavlově vhození míčku. Současně jsme se nemohli zastavit dřív, protože jinak by Pavel nevyprázdnil celou krabici.

Počty míčků v jednotlivých krabicích spolu s pozicí krabice, která se Pavlovi bude v příštím tahu líbit, nazveme stavem. Stavů je jen konečně mnoho, proto když bude Pavel dostatečně dlouho provádět tahy, dostane se jednou do stavu, ve kterém se ocitl. Podívejme se na okamžik, kdy se to stane poprvé. Pokud by tento stav nebyl počátečním, tak by se do něj postupně dostal ze dvou různých stavů – to je ovšem spor s tím, že stav před tahem se dá jednoznačně určit. Pavel se tedy časem dostane do stavu, ve kterém začínal.

(b) V této části se nebudeme zabývat stavy, ale rozmístěními – rozmístěním rozumíme pouze údaje o počtech míčků v krabicích (bez Pavlovy „pozice“). Díky části (a) víme, že kdykoli se jedním tahem můžeme dostat z rozmístění A do rozmístění B, tak následným opakováním tahů z (a) se nakonec opět octneme v rozmístění A. Jinak řečeno pak existuje posloupnost tahů vedoucí z B do A.

Nyní trochu obecněji, pokud existuje posloupnost tahů z rozmístění A do rozmístění B, dejme tomu přes rozmístění M_1, M_2, …, M_k, tak z pozorování z předchozího odstavce máme posloupnost tahů z B do M_k, z M_k do M_{k-1}, …až z M_1 do A. Celkově tedy opět existuje posloupnost tahů z B do A.

K vyřešení úlohy již stačí najít jedno rozmístění C s celkovým počtem n míčků takové, že je možné se do něj dostat z jakéhokoli jiného rozmístění s celkovým počtem n míčků. Tím totiž kdykoli se bude chtít Pavel dostat z rozmístění A do rozmístění B (v obou je n míčků), tak se nejprve dostane do C a následně víme, že existuje posloupnost taků z B do C, tedy existuje i z C do B.

Jako C volme takové rozmístění, kdy je v jedné pevné krabici K všech n míčků a zbylé krabice jsou prázdné. Do tohoto rozmístění se dostaneme následovně: vždy si Pavel vybere míček M mimo K, a tento míček každým tahem posune o jednu krabici dál (vybere si vždy krabici s M a při rozdávání míčků se M zbaví jako prvního). Takto časem dostane M do K, a v tom okamžiku si vybere jiný míček. Pavlovi se K nikdy nelíbí, tedy počet míčků v K takto roste do té doby, než jsou v K všechny míčky.

Poznámky opravujícího. Většině řešitelů nedělala úloha problém. Někteří si umínili, že přesně popíší, která že krabice se Pavlovi líbila před tahem, avšak to není příliš potřeba. Navíc i pak by řešení mělo dovysvětlit, jaké bylo před tahem rozmístění. Dále mě zaujalo, jak se Slováci vypořádali s překladem *míčků v krabicích*. Zatímco Češi snadno použili formulaci ze zadání, k použití čechismu *míček* se uchýlil pouze jeden Slovák. Ve zbytku jsou mezi sebou početně vyrovnané překlady *loptička* a *gulička*. Z toho jedny *loptičky* se namísto do *krabic* dávaly do *škatulek*. A jeden jiný řešitel dávající do *krabic* pro změnu *gule* nemoha přijít Pavlovi na jméno jej nazval *tým panákom*.

Poznámky opravujícího. Mirek Olšák

Úloha A1. *Je dáno reálné číslo a a posloupnost $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ splňující rekurentní předpis $x_0 = a$, $x_{n+1} = 2a - (a^2+1)/x_n$. Ukažte, že pokud je tato posloupnost periodická, má její nejkratší perioda lichou délku.*

Řešení (podle Eduarda Batmendijna a Samuela Sládka): Nejdříve si uvědomíme, že nejenže libovolný člen posloupnosti určuje člen následující, ale že určuje i člen předchozí. Platí

$$x_n = \frac{a^2+1}{2a - x_{n+1}}.$$

Je-li posloupnost dobře definovaná, je každý její člen nenulový, takže každý člen je také různý od $2a$. Předchozí vztah lze proto použít pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Předpokládejme, že zadaná posloupnost je periodická. Vezměme nejmenší m, pro které $x_m = x_0 = a$. V rámci první periody se podívejme na součet členů „naproti“, např. $x_0 + x_m = a + a = 2a$, $x_1 + x_{m-1} = (a^2-1)/a + (a^2+1)/a = 2a$ atd. Indukcí dokážeme, že platí $x_i + x_{m-i} = 2a$ i pro každou další dvojici. Předpokládejme, že již platí $x_i + x_{m-i} = 2a$ pro nějaké $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Potom

$$x_{i+1} + x_{m-i-1} = 2a - \frac{a^2+1}{x_i} + \frac{a^2+1}{2a - x_{m-i}} = 2a - \frac{a^2+1}{x_i} + \frac{a^2+1}{x_i} = 2a.$$

Nakonec pro spor předpokládejme, že $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Potom z dokázané identity plyne $x_k + x_k = 2a$, tudíž $x_k = a$, což je spor s tím, že $2k$ je nejkratší perioda.

Náznak jiného řešení (podle Anh Dung „Tondy“ Le a Radovana Švarce): Pokusíme se nalézt explicitní vzorec pro x_n. Za tímto účelem si vypíšeme několik prvních členů posloupnosti (a, $(a^2-1)/a$, $(a^3-3a)/(a^2-1)$, $\dots$) a všimneme si, že se čitatel jednoho zlomku rovná jmenovateli následujícího zlomku. Definujeme si tedy posloupnost $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ tak, aby $y_0 = 1$ a $y_{n+1}/y_n = x_n$. Zadaný rekurentní vztah je po přeformulování do y_n již lineární diferenční rovnice, která je standardně řešitelná.

Lze spočítat, že

$$x_n = \frac{(a+i)^{n+1} + (a-i)^{n+1}}{(a+i)^n + (a-i)^n},$$

kde i je komplexní jednotka. Řešení se dokončí tak, že se ukáže, že z rovnosti $x_j = x_{j+2k}$ plyne (po úpravách) rovnost $x_j = x_{j+k}$.

Poznámky opravujícího. Pokud by se za periodickou posloupnost považovala i posloupnost s předperiodou (čili např. $1, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \dots$), bylo by potřeba argumentaci prvního řešení (a řešení všech řešitelů kromě *Radovana Švarce*) mírně vylepšit. Stačilo by říci, že předperiodu posloupnost mít nemůže, protože z rovnosti $x_j = x_{j+m}$ plyne rovnost $x_{j-1} = x_{j+m-1}$, protože každý člen posloupnosti určuje i svého předchůdce. Vzhledem k tomu, že většina zdrojů definuje periodickou posloupnost bez předperiody, rozhodli jsme se nedělat rozdíly mezi řešeními, která předperiodu uvažovala a těmi, která ji neuvažovala. *(David Hruška & Pavel Šalom)*

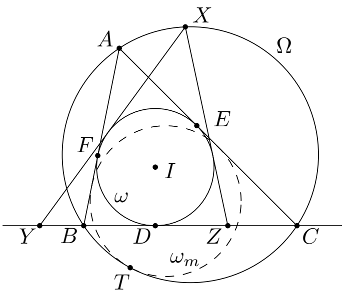
Úloha G1. *Trojúhelníky ABC a XYZ sdílí vepsanou kružnici a navíc body B, C, Y, Z leží v přímce. Uvažme kružnici, která se dotýká úseček AB, AC a navíc kružnice opsané trojúhelníku ABC[2], a její bod dotyku s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC označme T. Ukažte, že pokud X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, tak T leží na kružnici opsané trojúhelníku XYZ.*

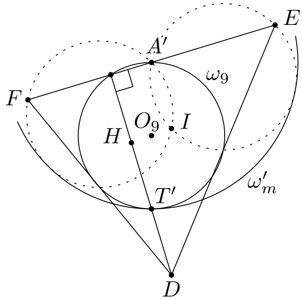
Řešení. Označme ω kružnici vepsanou trojúhelníku ABC, I její střed, r její poloměr a D, E, F body dotyku se stranami BC, CA, AB. Dále označme Ω kružnici opsanou trojúhelníku ABC a ω_m mixti kružnici ze zadání. Provedeme kruhovou inverzi podle ω. Obrazy značme čárkovaně.

Body A, B, C se zobrazí na středy úseček EF, FD, DE, takže Ω se zobrazí na *kružnici devíti bodů*[3] trojúhelníka DEF. Označme ji ω_9 a její střed O_9. Přímky AB, AC se zobrazí na kružnice s průměry IF, IE, které tak mají stejně jako ω_9 poloměr $r/2$ a procházejí bodem A'. Kružnice ω_m se tudíž zobrazí na kružnici se středem A' a poloměrem r a bod T se zobrazí na „bod naproti“ A' na ω_9 neboli na střed úsečky DH, kde H je ortocentrum trojúhelníka DEF. Povšimněme si, že O_9T' je jakožto střední příčka v trojúhelníku HID rovnoběžná s ID a má délku $|ID|/2 = r/2$.

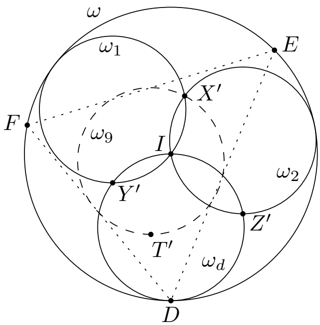
[2] Této kružnici se říká *mixti kružnice.*

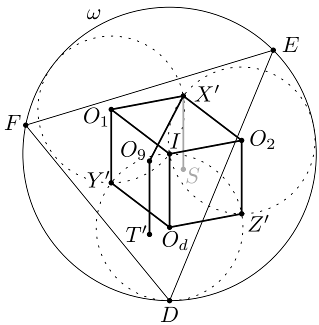
[3] O základních vlastnostech kružnice devíti bodů (nine-point circle) se můžeš dočíst například na Wikipedii.





Nyní do zvláštního obrázku zobrazíme body X, Y, Z. Leží-li bod X na Ω, leží jeho obraz X' na ω_9. Přímky XY, XZ se zobrazí na kružnice ω_1, ω_2, které procházejí skrz I a X' a dotýkají se kružnice ω, takže mají rovněž poloměry $r/2$. Jejich průsečíky s kružnicí nad průměrem DI (označme ji ω_d) jsou pak obrazy bodů Y, Z. Nyní stačí dokázat, že body T', X', Y', Z' leží na jedné kružnici.





Dokreslíme-li středy O_1, O_2, O_d kružnic ω_1, ω_2, ω_d a všechny vzniklé úsečky délky $r/2$, dostaneme obrázek šestiúhelníku $X'O_1Y'O_dZ'O_2$ složeného ze tří kosočtverců[4] $X'O_1IO_2$, $Y'O_1IO_d$, $Z'O_2IO_d$ a lomenou čáru $X'O_9T'$. S úsečkou IO_d je tak rovnoběžná nejen úsečka O_9T', ale i úsečky O_1Y' a O_2Z'. Dokreslíme-li proto rovnoběžník $X'IO_dS$, vzniknou dále kosočtverce $X'O_9T'S$, $X'O_1Y'S$ a $X'O_2Z'S$, takže body T', X', Y', Z' leží na kružnici se středem S a poloměrem $r/2$.

Poznámky opravujícího. Bohužel nám přišla jen dvě řešení, takže jsme neměli s opravováním moc práce. Může se zdát, že vzorové řešení využívá dost tvrzení, která nemusí každý znát (doporučujeme všem si o nich přečíst), ale jak předvedl *Eduard Batmendijn* ve svém řešení, tak to šlo i bez nich. Ten po kruhové inverzi podle kružnice vepsané dopočítal zobrazené body v komplexní rovině a s nepříliš velkou námahou se dobral cíle. I druhé řešení, které poslal *Anh Dung Le*, bylo správně, opět s klíčovou rolí kruhové inverze, ale kvůli některým nepřesnostem a chybějícím kusům se nevyhnul bodové ztrátě. Doufáme, že příště se nejtěžší úlohy v sérii nezaleknete a řešení přijde více. *(Štěpán Šimsa & Pepa Tkadlec)*

[4] Pro pokrytí degenerovaných případů chápeme rovnoběžník jako čtveřici bodů $KLMN$ takovou, že vektor KL je shodný s vektorem NM. Kosočtverec pak chápeme jako rovnoběžník $KLMN$, ve kterém navíc $|KL| = |KN|$.