Riešenia 6. série

Úloha N6. *Nájdite všetky funkcie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, ktoré pre ľubovolné $m,n\in\mathbb{N}$ spĺňajú rovnosť*

$$\gcd(f(m),n)+\operatorname{lcm}(m,f(n))=\operatorname{lcm}(f(m),n)+\gcd(m,f(n)),$$

kde gcd *a* lcm *označujú najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok.*

Riešenie. Nejprve dosadíme dvojici $(m,n)=(a,f(a))$, obdržíme

$$\begin{aligned}\gcd(f(a),f(a))+\operatorname{lcm}(a,f(f(a)))&=\operatorname{lcm}(f(a),f(a))+\gcd(a,f(f(a))),\\ f(a)+\operatorname{lcm}(a,f(f(a)))&=f(a)+\gcd(a,f(f(a))),\\ \operatorname{lcm}(a,f(f(a)))&=\gcd(a,f(f(a))),\\ a&=f(f(a)),\end{aligned}$$

z čehož plyne, že $a=f(f(a))$, tedy f je involuce. Najdeme nějaké $a>1$ nesoudělné s $f(1)$ a dosadíme postupně dvojice $(m,n)=(1,a)$, což dá

$$\begin{aligned}\gcd(f(1),a)+\operatorname{lcm}(1,f(a))&=\operatorname{lcm}(f(1),a)+\gcd(1,f(a)),\\ 1+f(a)&=af(1)+1,\\ f(a)&=af(1),\end{aligned}\tag{$*$}$$

a následně $(m,n)=(1,f(a))$, čímž s využitím výsledku z $(*)$ obdržíme

$$\begin{aligned}\gcd(f(1),f(a))+\operatorname{lcm}(1,f(f(a)))&=\operatorname{lcm}(f(1),f(a))+\gcd(1,f(f(a))),\\ \gcd(f(1),af(1))+\operatorname{lcm}(1,a)&=\operatorname{lcm}(f(1),af(1))+\gcd(1,a),\\ f(1)+a&=af(1)+1,\\ (1-a)f(1)&=1-a,\\ f(1)&=1.\end{aligned}$$

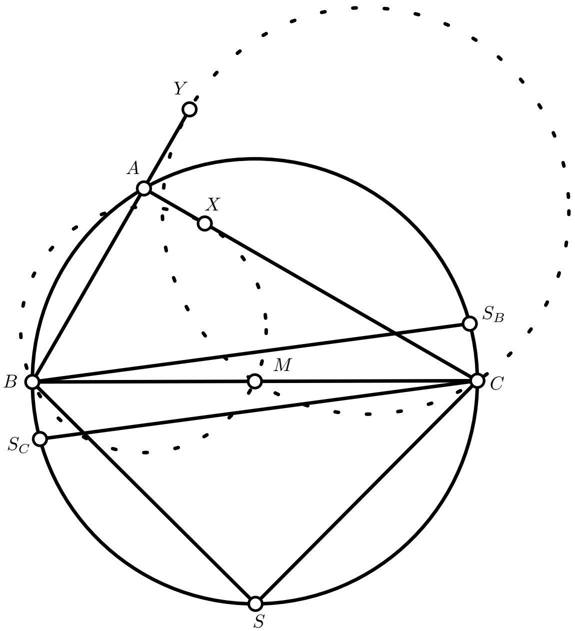
Tedy všechna přirozená čísla jsou nesoudělná $f(1)$ a vztah z $(*)$ se zjednoduší na $f(a)=a$ pro $a\in\mathbb{N}$. Jediným kandidátem na funkci vyhovující zadání je identita, snadným dosazením pak ověříme, že mu skutečně vyhovuje.

Poznámky opravovateľa. Většina řešení byla správně, nejčastější chybou bylo opomenutí ověření, že nalezená funkce skutečně vyhovuje zadání. *(Vašek Voráček)*

Úloha G6. *Buď ABC pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A, v ktorom je M stred strany BC. Označme X bod na polpriamke CA taký, že kružnica opísaná BMX sa dotýka AC. Analogicky zostrojme bod Y na polpriamke BA tak, že kružnica opísaná CMY se dotýka AB. Ďalej označme S stred toho oblúku BC kružnice opísanej ABC, ktorý neobsahuje A. Dokážte, že body X, Y, S ležia na jednej priamke.*

Riešenie. BÚNO $|BM|=1$. Pak z mocnosti máme $|BY|^2=|BM|\cdot|BC|=1\cdot 2=2=|BS|^2$, tedy $|BY|=|BS|$ a analogicky $|CX|=|CS|$.

Označme S_B střed oblouku AS obsahující C a S_C střed oblouku AS obsahující B. Pak protože M je střed BC i S_BS_C, tak $BS_B\parallel CS_C$. Ale to jsou vnitřní osy úhlů $\sphericalangle ABS$ a $\sphericalangle ACS$, tedy $SY\perp BS_B$ a $SX\perp CS_C$, z rovnoběžnosti $BS_B\parallel CS_C$ jsou tedy i SY a SX rovnoběžné, tedy S, X, Y leží na přímce.



Poznámky opravovateľa. Hlavní trik úlohy spočíval ve spočtení rovnoramenných trojúhelníků mocností, zbytek byl už jen rutinní úhlení. Většina došlých řešení byla správně.

(Radek Olšák)

Úloha A6. *Majme strom s množinou vrcholov V a množinou hrán E. Každému vrcholu $v \in V$ je priradené reálne číslo x_v. Dokážte, že*

$$\sqrt{|E|} \sum_{v \in V} x_v^2 \geq 2 \sum_{\{u,v\} \in E} x_u x_v.$$

Riešenie. Než se začneme věnovat samotné nerovnosti, pozměníme strom tak, aby levá strana zůstala stejná a pravá se nezmenšila. Pokud dokážeme nerovnost pro takto pozměněný strom, dokážeme to i pro ten původní.

Nejprve si uvědomíme, že pokud pro všechna v nahradíme x_v hodnotou $|x_v|$, levá strana zůstane stejná a na pravé se změní pouze znaménka některých sčítanců, tedy se pravá strana nezmenší.

Dále „přepojíme“ hrany tak, aby všechny měly společný vrchol. Vybereme vrchol a tak, aby $x_a \geq x_v$ pro všechna $v \in V$. Pokud je takových vrcholů více, vybereme libovolný z nich. Strom zakořeníme ve vrcholu a. Vezměme nějaký vrchol u různý od a a jeho otce označíme v. Protože $x_a \geq x_v$ a x_u je nezáporné, platí $x_a x_u \geq x_u x_v$. Tudíž pokud smažeme hranu uv a přidáme místo ní hranu ua, pravá strana dokazované nerovnosti se nezmenší, zároveň náš graf zůstane stromem. Levá strana je nezávislá na uspořádání hran, tedy zůstane stejná. Takto budeme pokračovat, dokud všechny hrany nebudou obsahovat vrchol a.

Nerovnost se nyní můžeme upravit na

$$\sqrt{|E|}\sum_{v\in V} x_v^2 \geq 2 \sum_{v\in V\setminus\{a\}} x_a x_v,$$

$$|E|\cdot\frac{1}{\sqrt{|E|}}x_a^2 + \sqrt{|E|}\sum_{v\in V\setminus\{a\}} x_v^2 \geq 2 \sum_{v\in V\setminus\{a\}} x_v x_a.$$

Protože vrcholy mají přiřazená nezáporná čísla, z AG nerovnosti víme

$$\frac{1}{\sqrt{|E|}}x_a^2 + \sqrt{|E|}\cdot x_v^2 \geq 2x_a x_v.$$

Náš graf je strom, tedy $|E| = |V| - 1$. Tudíž sečteme-li tyto nerovnosti pro všechna $v \in V \setminus \{a\}$, získáme dokazovanou nerovnost.

Poznámky opravovateľa. Velká část řešení postupovala stejně jako vzorové.

(Majda Mišinová)

Úloha C6. *Majme multigraf*[1] *na n vrcholoch. Každá hrana je ofarbená jednou z n farieb a hrany každej z farieb tvoria cyklus nepárnej dĺžky. Ukážte, že existuje cyklus nepárnej dĺžky, v ktorom má každá hrana inú farbu.*

Riešenie. Uvažme les, ve kterém je každá barva použita nanejvýš jednou. Z takových lesů vybereme ten, který má nejvíce hran.

Protože se jedná o les, má nanejvýš $n-1$ hran, takže existuje barva (BÚNO červená), kterou jsme nepoužili. Zároveň všechny červené hrany musí vést v jedné komponentě souvislosti: kdyby totiž vedla červená hrana mezi dvěma různými komponentami, tak ji můžeme přidat a zvýšit tím počet hran našeho lesa.

V této komponentě si zafixujeme kořen a do vrcholů si napíšeme jejich vzdálenost od kořene. Protože červený cyklus má lichou délku, tak na něm existují dva po sobě jdoucí vrcholy se stejnou paritou p vzdálenosti do kořene. Přidáním této hrany dostaneme cyklus délky $1 + 2p$ modulo 2, což je 1. Tudíž jsme získali cyklus liché délky. Zároveň od každé barvy jsme použili jen jednu hranu, takže na tomto cyklu má každá hrana jinou barvu.

Poznámky opravovateľa. Plný počet bodů dostala dvě řešení, která se obě ubírala podobnou cestou jako vzorové řešení. Jedno použilo místo extremální volby lesa argument s indukcí.

(Radek Olšák)

[1] *Multigraf* je graf, v ktorom smie viesť viac hrán medzi jednou dvojicou vrcholov.