Riešenia 2. série

Úloha A2. *Pavel našiel kvadratické polynómy $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$. Je možné, že všetky z čísel 2011, 2012, ..., 2018 sú koreňmi rovnice $f(g(h(x))) = 0$?*

Riešenie. Kvadratický polynóm $f(x)$ nadobúda jednu hodnotu y najviac pre 2 rôzne vstupy x, lebo kvadratická rovnica $f(x) = y$ má najviac 2 riešenia. Preto pre 8 možných x, ktoré sú $2011, 2012, ..., 2018$ polynóm $h(x)$ nadobúda aspoň 4 hodnoty a následne $g(h(x))$ nadobúda aspoň 2 hodnoty. Hodnota $f(g(h(x)))$ má byť vždy rovná 0, takže $g(h(x))$ môže nadobúdať najviac 2 hodnoty a $h(x)$ najviac 4 hodnoty, čiže to musí byť presne toľko.

Povedzme, že $h(x) = ax^2 + bx + c$, Čísla $2011, 2012, \cdots, 2018$ musia vytvoriť 4 dvojice, pričom funkčné hodnoty v každej dvojici sa rovnajú. Ak $h(x) = h(y)$, pre $x \neq y$ dostávame

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= ay^2 + by + c, \\
a(x-y)(x+y) + b(x-y) &= 0, \\
x + y &= -b/a.
\end{aligned}
$$

Súčet čísel v každej zo štyroch dvojíc je rovnaký, súčet všetkých čísel je $8 \cdot (2011 + 2018)/2$, čiže súčet jednej dvojice je 4029. Z toho je pre každé číslo jednoznačne určené, s kým musí byť v dvojici: $(2011, 2018), (2012, 2017), (2013, 2016), (2014, 2015)$.

Vrchol paraboly $h(x)$ má x-ovú súradnicu $-a/2b = 2014,5$. Čísla 2011, 2012, 2013, 2014 ležia všetky naľavo od vrchola, kde je parabola buď klesajúca alebo rastúca, takže hodnoty $h(2011)$, $h(2012)$, $h(2013)$, $h(2014)$ sú usporiadané podľa veľkosti. Znovu musia vytvoriť dvojice s rovnakou hodnotou $g(h(x))$, lebo $g(h(x))$ nadobúda len 2 hodnoty a rovnakým spôsobom ako vyššie dostaneme, že súčet dvojíc je rovnaký. Musí teda platiť

$$
\begin{gathered}
h(2011) + h(2014) = h(2012) + h(2013), \\
a \cdot 2011^2 + b \cdot 2011 + c + a \cdot 2014^2 + b \cdot 2014 + c = a \cdot 2012^2 + b \cdot 2012 + c + a \cdot 2013^2 + b \cdot 2013 + c, \\
a(2014 - 2012)(2014 + 2012) = a(2013 - 2011)(2013 + 2011), \\
2 \cdot 4026a = 2 \cdot 4024a, \\
a = 0.
\end{gathered}
$$

Lenže $a \neq 0$, lebo polynóm $h(x)$ má byť kvadratický, teda nie je možné, aby všetky z čísel $2011, 2012, \ldots, 2018$ boli koreňmi polynómu $f(g(h(x)))$. *(Tomáš Sásik)*

Úloha C2. *Dokážte, že prirodzené čísla sa dajú rozdeliť do dvoch skupín tak, aby boli splnené nasledovné predpoklady:*

1) Pre každé prvočíslo p a pre každé prirodzené číslo n, čísla p^n, p^{n+1} a p^{n+2} nie sú v rovnakej skupine.

2) Neexistuje žiadna nekonečná geometrická postupnosť prirodzených čísel, ktorej všetky členy by boli v jednej skupine.

Riešenie. Všetky prirodzené čísla sa dajú napísať jednoznačne, ako súčin prvočísel, ktoré sa môžu opakovať. Zaveďme pre všetky čísla $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$ pomocné číslo $f(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i$ (a ďalej bez ujmy na všeobecnosť $f(1) = 1$). Povieme si, že ak $f(n_1) = f(n_2)$, tak n_1 a n_2 dáme do tej istej skupiny. Stačí nám teda iba dobre rozdeliť tieto pomocné čísla, a potom budú dobre zafarbené aj naše čísla. Čo nám teda hovoria naše podmienky v takomto prípade? Chceme si nájsť rozdlenie také, že $f(p^n)$, $f(p^{n+1})$, $f(p^{n+2})$, teda n, $n+1$, $n+2$ nie sú v rovnakej skupine. A chceme, že pre každú dvojicu kladných celých g, q neboli všetky členy $g, gq, gq^2, \ldots$ pri originálnom rozdlení v jednej skupine. To pre nás znamená, že chceme, aby pre každé dvojicu kladných celích g, q neboli všetky pomocné čísla $f(g), f(g)+f(q), f(g)+2f(q), \dots$ v tej istej skupine. Máme teda teraz úlohu ekvivalentnú s originálnym: Chceme si rozdeliť prirodzené čísla do dvoch disjunktných skupín tak, aby platilo:

1. Neboli tri za sebou idúce čísla v tej istej skupine.
2. Neexistovala nekonečná aritmetická postupnosť, ktorej všetky členy sú v tej istej skupine.

Poďme si teda takéto rozdelenie skonštruovať: nech značí a jednu skupinu a b druhú, a zápis $abbaabab\dots$ to, že v skupine a sú čisla $\{1,4,5,7,\dots\}$ a v b sú $\{2,3,6,8,\dots\}$ atď. Nech nazveme trojicu $aba = X$ a trojicu $bab = Y$. Nech je naša postupnosť táto: $XYXXYYXXXYYYXXX$ $XYYYY\dots$ táto postupnosť vyhovuje zadaniu pretože v každej trojice v postupnosti má jeden X alebo Y zahrnutý aj stredý aj niektorý bočný člen, a tie sú rozlišné.

Poďme si ukázať, že každá aritmetická postupnosť s diferenciou $3k$ má aj člen a aj b (toto nám stačí ukázať, pretože každá aritmetická postupnosť má takúto podpostupnosť, stačí si zobrať tretí, šiesty a deviaty atď člen). Tak poďme si to ukázať pre nejakú konkrétnu postupnosť. Uvažujme teda sekvenciu z X-iek , ktorá má aspoň k po sebe idúcich X-iek, aritmetická postupnosť má člen pred touto sekvenciou. Takáto sekvencia zjavne existuje, pretože ľubovolne ďaleko od nuly máme sekvenciu X-iek dĺžky aspoň k. Tak tu zjavne má naša aritmetická postupnosť tu nejaký člen. A tiež má člen v nasledujúcej sekvencii Y-iek. Ale nakoľko je diferencia postupnosti tvaru $3k$, tie 2 členy sú na rovnakom pozícií vo svojich trojiciach X, Y. To ale znamená, že sú rôzne. Takže pre každú aritmetickú sa dá nájsť dvojica členov rôznych skupín. To ale znamená, že naša konštrukcia naozaj vyrieší alternatívný príklad, a ako sme ukázali vyššie, táto konštrukcia sa ľahko dá preniesť na originálnu úlohu, ktorá je tým pádom vyriešená.

Poznámky opravovateľa. Väčšina správných riešení postupovala až na detaili (napr. fungujú iné konštrukcie) ako vzorové riešenie. *Matej Doležálek* a *Lucia Krajčoviechová* použili rekurentné určenie rozdelovania; *Michal Beránkek* a *Dávid Pásztor* použili po odbití geometrických postupností prvočísel na odbitie zložených čísel paritu počet cifier v $f(n)$. Chyby, za ktoré sa strhávali body, boli nedostatočne vysvetlené konštrukcie. *Bodovanie.* Ako ste si mohli všimnúť, okrem bodov som vám skoro všetkým udeloval kvaternio, ako hodntenie. Teraz vám vysvetlím, ktorá imaginárna časť čo znamená: $\pm i$ implikuje to, že ako sa nápady v riešení páčili opravovateľovi, za subjektívne hodnotené pekné myšlienky sa dalo dostať plusbod, a pre škaredé metódy (ktoré sa našťastie nevyskytli teraz) minus. $\pm j$ sa viaže k správnemu používaniu matematického jazyka, minusbod sa dá dostať na príliš formálne popisovanie riešenia (myslím tým, že ten formálny popis nepomôže až tak extra s riešením, ale je vďaka tomu riešene oveľa ťažšie pochopitelné), alebo používanie matematického slangu. $\pm k$ sa viaže k tomu, ako overall vyzerá vaše riešenie. Mínus bod sa dalo získať za písanie ručne, a prípadne za škaredý sken/písmo. Plus bod sa dá získať na používanie programu LaTeX, ktorá sa naozaj vyplatí ovládať.

(Ákos „prezyvka“ Záhorský)

Úloha G2. *Bod O je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC. Os uhla BAC pretína stranu BC v bode D. Nech M je taký bod, že $MC \perp BC$ a $MA \perp AD$. Priamky BM a OA sa pretínajú v bode P. Dokážte, že kružnica so stredom v P prechádzajúca bodom A sa dotýka priamky BC.*

Riešenie. Podľa väčšiny

Vyriešme najprv špeciálne prípady.

Ak je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou BC, je situácia pomerne jednoduchá – priamky AO a AD splývajú, navyše $ADBM$ je obdĺžnik. Nakoľko triviálne $|BD| = |DC| = |AM|$ a trojuholníky ADP a APM sú podobné, tak sú aj zhodné a teda $|AP| = |PD|$, čo pri skombinovaní s kolmosťou priamky AD na BC už implikuje naše tvrdenie.

Ak je trojuholník ABC pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C, potom zrejme $M \equiv A$, $MB \equiv AB$, navyše $AO \equiv AD$, teda bod P je nekorektne definovaný a naša úloha nemá zmysel.

Ďalej budeme pre jednoduchosť argumentácie predpokladať, že $|AC| > |AB|$. Ak platí opak, zmenia sa síce orientácie niektorých trojuholníkov, ale argumentáciu to nezmení vôbec a uhlenie bude analogické.

Z náčrtov alebo rysovania si môžeme všimnúť, že tvrdenie nielenže platí, ale kružnica so stredom v P prechádzajúca bodom A sa dokonca dotýka priamky BC v bode D. Ak tomuto uveríme, ľahko si rozmyslíme, že aby sme sa zbavili kružnice, stačí nám dokázať postačujúcu podmienku nášho tvrdenia a to, že trojuholník ADP je rovnoramenný a PD je kolmé na BC.

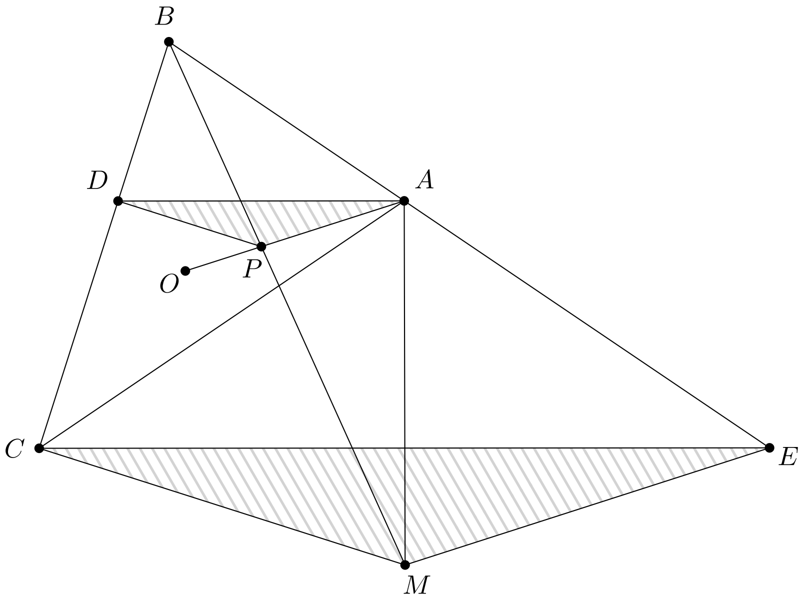
Označme si E taký bod na polpriamke opačnej k AB, aby platilo $|AE| = |AC|$. Potom zrejme ACE je rovnoramenný. Nakoľko priamka kolmá na os uhla $\sphericalangle BAC$ (v našom prípade AD) je osou vonkajšieho uhla (v našom prípade $\sphericalangle CAE$). Preto je priamka AM osou úsečky EC. Z toho vyplýva, že aj trojuholník CME je rovnoramenný.

Nasleduje trocha uhlenia: $|\sphericalangle BAD| = \alpha/2 = |\sphericalangle AEC|$, ak označíme uhly v trojuholníku ABC klasicky. Z toho vyplýva $AD \| EC$. Ďalej $|\sphericalangle BAO| = 90 - \gamma$, čo sa ľahko vyuhlí využijúc fakt, že O je stred kružnice opísanej ABC. $|\sphericalangle ADC| = 180 - \gamma - \alpha/2$ (triviálne) a po doplnení na 360 stupňov v štvoruholníku $DCMA$ máme $|\sphericalangle AMC| = \gamma + \alpha/2$. Potom zo zrejmých dôvodov $|\sphericalangle CEM| = 90 - \gamma - \alpha/2$ a teda uhol $\sphericalangle AEM$ má veľkosť $90 - \gamma - \alpha/2 + \alpha/2 = 90 - \gamma$. Teda aj priamky AO a EM sú rovnobežné.

Z toho priamo vyplývajú podobnosti trojuholníkov BAD a BEC a trojuholníkov BAP a BEM. Z týchto podobností zasa vyplývajú rovnosti pomerov: $\frac{|BA|}{|BE|} = \frac{|BP|}{|BM|}$ a tiež $\frac{|BA|}{|BE|} = \frac{|BD|}{|BC|}$. Vidíme teda, že $\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BP|}{|BM|}$. To ale implikuje podobnosť trojuholníkov BPD a BMC, teda skutočne $PD \perp BC$.

Rovnoramennosť trojuholníka APD je teraz jasná z faktu, že vhľadom k rovnobežnosti všetkých jeho strán so stranami trojuholníka EMC a vhodnej polohe sú tieto dva trojuholníky rovnoľahlé (a teda podobné) so stredom rovnoľahlosti v B.

Tým sme hotoví.



Poznámky opravovateľa. Mnohí z vás si pomohli dokreslením Švrčkovho bodu pre bod A. Tento postup som považoval za reduntantný a preto som vzorák uviedol bez tohto počinu.

Zároveň sa chcem touto cestou osobne ospravedlniť za nedostatok v zadaní, keďže sme mali v úlohe ten patologický prípad s pravým uhlom pri vrchole C. Body za nepovšimnutie alebo nespomenutie tohto špeciálneho prípadu som sa rozhodol nestrhávať, hoci formálne sa jedná o nedostatočnú diskusiu. *(Peter „Pedro“ Súkeník)*

Úloha N2. *Majme polynóm p s celočíselnými koeficientami taký, že rovnica $p(x) = 2^n$ má celočíselné riešenie pre všetky prirodzené n. Ukážte, že p je lineárny.*

Riešenie. V našom riešeniu budeme používať pojem limity. Pre sledování riešenia stačí intuitívný náhľad „limita je, keď sa to k tomu čím dál viacej blíží“.

Nech $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ a $x_n \in \mathbb{Z}$, že $p(x_n) = 2^n$. Z toho, že $p(x_{n1}) \neq p(x_{n2})$ pre $n_1 \neq n_2$, je jasné, že $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$.

Kedže $P(x_k) = 2^k$, máme

$$2^m = \frac{2^{m+n}}{2^n} = \frac{p(x_{m+n})}{p(x_n)} = \frac{x_{n+m}^m}{x_n^m} \cdot \frac{a_m + a_{m-1}/x_{m+n} + \ldots + a_0/x_{m+n}^m}{a_m + a_{m-1}/x_n + \ldots + a_0/x_n^m}.$$

Kedže $\lim_{n\to\infty} a_m + a_{m-1}/x_{m+n} + \ldots + a_0/x_{m+n}^m = a_m$, máme $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+m}}{x_n} = 2$. Označme $z_n = \frac{x_{m+n}}{x_n}$.

Teraz sa pozrieme na výraz $p(x_{m+n}) - p(2x_n)$. Ten môžeme vyjádriť dvema spôsobmi. Za prvé ako

$$(x_{m+n} - 2x_n) \cdot \left(a_m (x_{m+n}^{m-1} + \cdots + 2^{m-1} x_n^{m-1}) + a_{m-1}(x_{m+n}^{m-2} + \cdots + 2^{m-2} x_n^{m-2}) + \cdots + a_1 \right).$$

Za druhé ako

$$2^m p(x_n) - p(2x_n) = a_{m-1} x_n^{m-1}(2^m - 2^{m-1}) + a_{m-2} x_n^{m-2}(2^m - 2^{m-2}) + \cdots + a_1 x_n (2^m - 2).$$

Z tohto máme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (x_{n+m} - 2x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{m-1} x_n^{m-1}(2^m - 2^{m-1}) + \cdots + a_1 x_n (2^m - 2)}{a_m (x_{m+n}^{m-1} + \cdots + 2^{m-1} x_n^{m-1}) + \cdots + a_1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{m-1} 2^{m-1} + [\text{Niečo s malým stupňom}]}{a_m (z_n^{m-1} + 2 z_n^{m-2} + \cdots + 2^{m-1} + [\text{Niečo s malým stupňom}]} \\
&= \frac{a_{m-1}(2^m - 2^{m-1})}{a_m (2^{m-1} + 2 \cdot 2^{m-2} + \cdots + 2^{m-1}} \\
&= \frac{a_{m-1} 2^{m-1}}{a_m m 2^{m-1}} \\
&= \frac{a_{m-1}}{m a_m}.
\end{aligned}$$

Kedže $x_{n+m} - 2x_n$ má konečnú limitu a je to celé číslo, musí od nějakého N ďalej být konstatní a rovnať se nejakému celému ℓ (dokonce vieme, že $\ell = \frac{a_{m-1}}{m a_m}$, ale to nebude dôležité). Tedy pre $n \geq N$ platí $x_{m+n} = 2x_n + \ell$. Nech $q = \frac{l}{3}$ a $y_k = x_{N+km} - q$. Pak $y_{k+1} = x_{N+(k+1)m} - q = 2x_{N+km} + \ell - \frac{\ell}{3} = 2(x_{N+km} + q) = 2y_k$. Keď definujeme $Q(x) = p(x+q)$, máme $Q \in \mathbb{Q}[x]$ a $Q(y_k) = p(x_{N+km}) = 2^{N+km}$. Položme $R(x) = \frac{Q(y_0)x^m}{y_0^m}$.

Platí $R(y_0) = Q(y_0)$ a keď $R(y_n) = Q(y_n)$, pak $R(y_{n+1}) = R(2y_n) = 2^m R(y_n) = 2^m Q(y_n) = 2^{N+(k+1)m} = Q(y_{n+1})$. Tedy Q a R splývajú na nekonečne veľa bodoch, tedy

$Q = R$. Z toho $Q(x) = cx^m$ pre nejaké $c \in \mathbb{Q}$. Z toho pak $p(x) = c(x-q)^m$. To se dá prepísať do tvaru $p(x) = \frac{d(ax-b)^m}{e}$, kde $a, b, d, e \in \mathbb{Z}$. Nech $d = 2^\alpha D$, $e = 2^\beta E$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ a $2 \nmid D, E$ (na to potrebujeme $D \neq 0 \neq E$, ale to je zrejmé). Pak ale pro $x \in \mathbb{Z}$ je $p(x) = 2^{\alpha-\beta+km} \cdot \frac{K}{L}$, kde $k \in \mathbb{N}_0$, $K, L \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid K, L$. Ale každé 2^n musí jít takto vyjádriť, tedy musí byť $m = 1$ a jsme hotoví.

(Martin „Vodka“ Vodička)