Řešení 5. série

Úloha A5. *Dvojice nekonečných posloupností celých čísel a_1, a_2, ... a b_1, b_2, ... splňuje pro $n \geq 3$ vztah*

$$(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})(b_n - b_{n-2}) = 0.$$

Ukažte, že existuje přirozené k takové, že $a_k = a_{k+2016}$.

Řešení. Uvažujme posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů v rovině definovanou vztahem $X_n = (a_n, b_n)$. Všimněme si, že $(a_n - a_{n-1}, b_n - b_{n-1})$ jsou souřadnice vektoru $X_n - X_{n-1}$.

Označme skalární součin vektorů x a y jako $\langle x, y\rangle$.[1] Potom se zadání dá přepsat jako $\langle X_n - X_{n-1}, X_n - X_{n-2}\rangle = 0$.

Protože pro skalární součin platí také vztah $\langle x, y\rangle = |x||y| \cos\varphi$, kde φ je úhel, který vektory x, y svírají, říká nám zadání, že vektory $X_n - X_{n-1}$ a $X_n - X_{n-2}$ jsou na sebe kolmé (pokud se domluvíme, že nulový vektor je kolmý na všechno).

Uvažujme nyní trojúhelník X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, o němž již víme, že má pravý úhel u vrcholu X_n. Z Pythagorovy věty dostaneme

$$|X_{n-1}X_{n-2}|^2 = |X_nX_{n-1}|^2 + |X_nX_{n-2}|^2$$

Proto můžeme odhadnout

$$|X_{n-1}X_{n-2}|^2 \geq |X_nX_{n-1}|^2,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $|X_nX_{n-2}| = 0$, tedy body X_n a X_{n-2} splývají.

Pokud jako $d(n)$ označíme $|X_nX_{n-1}|^2$, tak nerovnost říká, že $d(n) \leq d(n-1)$. Ale protože souřadnice bodů jsou celočíselné, tak i druhé mocniny jejich vzdáleností, tedy $d(n)$, budou celočíselné a nezáporné. A jelikož neexistuje nekonečná klesající posloupnost nezáporných celých čísel, tak jistě od nějakého N bude pro všechna $n > N$ platit $d(n) = d(n-1)$, tedy bude platit i rovnost $X_{n-2} = X_n = X_{n+2} = \cdots = X_{n+2016}$, a pokud se rovnají dva body, tak se rovnají i jejich souřadnice, tedy $a_n = a_{n+2016}$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky opravujícího. Vzorovým způsobem vyřešil úlohu jen Tomáš Konečný. Všichni ostatní si vystačili s algebraickými úpravami a odhady, někteří pěkně a stručně, jiní… méně.

Kdyby vás zajímaly souvislosti mezi algebraickými a geometrickými úlohami, můžu jen doporučit článek od Johna O'Ferryho dostupný na adrese `https://goo.gl/HnRgQV`.

(Matěj Konečný)

Úloha N5. *Na kružnici leží $n \geq 2$ přirozených čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nechť*

$$k_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i},$$

kde indexy bereme modulo n. Pokud platí, že pro každé i je k_i celé číslo, ukažte, že

$$2n \leq \sum_{i=1}^{n} k_i < 3n.$$

Řešení. Nejpve ukuážeme $2n \leq \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$. Na to si stačí rozdělit k_i na $\frac{x_{i-1}}{x_i} + \frac{x_{i+1}}{x_i}$. Potom můžeme sumu přeuspořádat na

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i} + \frac{x_i}{x_{i+1}},$$

[1] Skalární součin vektorů $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je definován jako $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

kde všechny indexy uvažujeme modulo i. Z AG nerovnosti však víme, že $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Tedy každý sčítanec je alespoň 2, tedy $2n \leq \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$.

Nyní indukcí dokážeme $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i < 3n$. Pro $n = 1$ je to zřejmé. Pokud $n = 2$, pak máme ukázat, že pokud na kružnici leží čísla a a b splňující podmínky, pak platí $\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} < 6$. Když jsou si a a b rovné, je požadovaný součet roven 4. Jinak nechť BÚNO $b > a$. Potom $b = 2a$ (protože $b \mid 2a$), tedy uvažovaný součet je 5.

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro $n - 1$, a dokážeme jej i pro n.

Pokud jsou všechna čísla na kružnici stejná, je součet přesně $2n$. Nechť tomu tak není. Pak existuje číslo, které je ze všech na kružnici největší (ne nutně ostře) a sousedí s menším číslem (pokud jdeme dokola po kružnici, někdy na něj musíme narazit).

Nechť x_m je takové maximální číslo. Potom $x_{m-1} + x_{m+1} < 2x_m$, protože alespoň jedno z čísel je ostře menší než x_m a druhé je nejvýše x_m. Protože ovšem $x_m | x_{m-1} + x_{m+1}$, vyplývá z toho vztah $x_{m-1} + x_{m+1} = x_m$.

Co se stane, když z kružnice odebereme x_m? Většina k_i se zachová, krom k_{m-1}, k_m a k_{m+1}. Číslo $k_m = 1$ ze součtu zcela zmizí. Číslo

$$k_{m-1} = \frac{x_{m-2} + x_m}{x_{m-1}} = \frac{x_{m-2} + x_{m-1} + x_{m+1}}{x_{m-1}} = \frac{x_{m-2} + x_{m+1}}{x_{m-1}} + 1$$

se změní na

$$\frac{x_{m-2} + x_{m+1}}{x_{m-1}},$$

takže se zmenší o jedničku. To samé se dá říct o k_{m+1}. Speciálně z toho plyne, že zůstanou celá, takže můžeme využít indukčí předpoklad. Takovéto rozmístění čísel na kružnici dává požadovaný součet menší než $3(n - 1)$. Protože je tento součet ovšem roven $\sum_{i=1}^{n} k_i - 3$ (protože $k_{m\pm1}$ se zmenší o jedna a $k_m = 1$ zanikne), je $\sum_{i=1}^{n} k_i < 3n$, což jsme chtěli.

Poznámky opravujícího. Úloha to bylo jednoduchá, hodně z vás ji mělo správně. Těm, kteří dokázali pouze dolní odhad, tak jsem dal jen jeden bod, protože to byla výrazně lehčí část celé úlohy.

Povšimněte si, že první část úlohy vůbec nebylo třeba řešit zvlášť - z druhé části vlasně plyne, že součet je buď $2n$, nebo o tři více než to v indukčním předpokladu, z čehož lehce plyne i první část. *(Kuba Svoboda)*

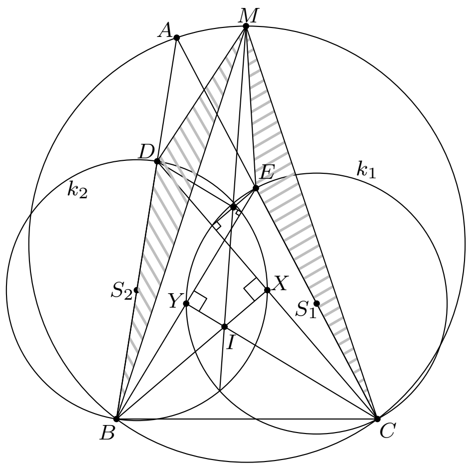
Úloha G5. *V trojúhelníku ABC leží body D a E na stranách AB, resp. AC tak, že $|DB| = |BC| = |CE|$. Nechť F je průsečík BE a CD. Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníka ABC, H je ortocentrum trojúhelníka DEF a M je střed oblouku BAC. Ukažte, že I, H a M leží na jedné přímce.*

Řešení. Na začátek si uvědomme, že trojúhelníky DBC a BCE jsou rovnoramenné. Takže osa úhlů u hlavního vrcholu v nich splývá s výškou. Z toho plyne, že BI, resp. CI, je kolmá na CD, resp. BE. Tudíž I je ortocentrum trojúhelníka BFC.

Nechť k_1, resp. k_2, je kružnice nad průměrem CE, resp. BD. Nechť X, resp. Y, je průsečík BI, resp. CI, s CD, resp. BE. Potom z Thaletovy věty je $BCXY$ tětivový čtyřúhelník. Takže z mocnosti plyne $|IB||IX| = |IC||IY|$. To znamená, že I má stejnou mocnost ke k_2 jako ke k_1. Analogicky se ukáže, že H má ke k_1 stejnou mocnost jako ke k_2. Takže IH je chordála k_1 a k_2.

Takže nám stačí dokázat, že M má ke k_1 i k_2 stejnou mocnost. Označme si jejich středy jako S_1 a S_2. Protože obě mají poloměr rovný $\frac{|BC|}{2}$, stačí dokázat, že $|MS_1| = |MS_2|$ (protože mocnost je rozdíl druhých mocnin vzdálenosti ke středu a poloměru).

Všimněme si, že z obvodových úhlů je $|\angle MCE| = |\angle MBD|$. Navíc z toho, že M je střed oblouku BAC plyne $|MC| = |MB|$. Když k tomu ještě připojíme fakt, že $|CE| = |BD|$, dostáváme z věty *sus* shodnost trojúhelníků MCE a MBD. Protože MS_1 a MS_2 jsou v nich sobě příslušející těžnice, dostáváme $|MS_1| = |MS_2|$, což jsme chtěli.



Poznámky opravujícího. Úloha byla těžší, ale nikoliv nezdolatelná. Přestože na vzorově řešení pomocí mocnosti nikdo nepřišel, tři řešitelé nalezli způsob, jak úlohu vyřešit stejnolehlostí - dva z nich tím, že si dokreslili Švrčkovy body S_B a S_C a ukázali, že MS_BIS_C je rovnoběžník.

(Rado Švarc)

Úloha C5. *Nechť $k \geq 2$ a $n \geq k-1$ jsou daná přirozená čísla. Rado a Matěj hrají hru. Na začátku Rado na tabuli napíše za sebou n celých čísel. Matěj může v každém kroku zvolit libovolně dlouhý souvislý blok za sebou jdoucích čísel (klidně může i všechna, nebo naopak jenom jedno). Rado pak buď všechna čísla v tomto bloku zvýší o jedničku, nebo všechna o jedničku sníží. Matěj vyhraje, pokud se na tabuli objeví alespoň $n-k+2$ čísel dělitelných k. Ukažte, že Matěj umí vyhrát v konečném počtu kroků.*

Řešení. Namísto samotných čísel si na tabuli v celém řešení budeme představovat pouze jejich zbytky modulo k. Při tomto pohledu je cílem Matěje vynulovat všechna až na $k-2$ čísel.

Matějova strategie může vypadat třeba takto: V každém kroku najde poslední nenulové číslo y na pozici j a následně $(k-y)$-té nenulové číslo (od začátku) x na pozici i. Pak zvolí blok počínající pozicí i a končící pozicí j včetně. Poznamenejme, že pokud Matěj ještě nevyhrál, tak je stále na tabuli alespoň $k-1$ nenulových čísel, z nichž všechna jsou rovna nejvýše $k-1$ (protože jsou to zbytky). Z toho plyne, že popsaná čísla y, x vždy najde.

Zbývá ukázat, proč touto strategií vyhraje, tedy proč Rado proti takové strategii nemůže hru zacyklit. K tomu stačí uspořádat všechny možné stavy hry (tj. n-tice čísel na tabuli) tak, aby se každým tahem situace pro Matěje zlepšila. Možných stavů je jenom konečně mnoho, takže hra bude muset někdy skončit a jediná příležitost k tomu je Matějova výhra.

Primárním kritériem je pozice j posledního nenulového čísla – čím menší, tím lepší. Matěj nikdy nepoužívá pozice za posledním nenulovým číslem, takže Rado nemůže pozici posledního nenulového čísla zvýšit.

Sekundární kritérium je následující. Uvažme opět pozice i, j a čísla x, y jako v druhém odstavci. Na všech pozicích za i nevčetně si představíme číslici 0 a přečteme celou tabuli jako číslo v soustavě o základu k. Tomuto číslu budeme říkat hodnota stavu a čím je menší, tím je situace pro Matěje lepší.

Situace se pro Matěje stále zlepšuje. Pokud Rado sníží Matějem předepsaný blok a nevynuluje číslo y, pak snižovaná cifra x na původní pozici i je ta nejvíce vlevo, která se změnila, takže se sníží celková hodnota pozice.

Naopak, když Rado blok zvýší (a nevynuluje y), tak bude nová pozice i více nalevo a tak bude hodnota celé pozice bude opět nižší.

Příklad: Nechť $k = 3$, $n = 5$

$$1, 2, 0, 2, 1_j,$$

$y = 1$, $k - y = 2$.

$$1, 2_i, 0, 2, 1_j,$$

$x = 2$, hodnota pozice$= 12000_{(3)} = 135$, Matěj nabízí úsek i až j včetně, Rado zvýší:

$$1, 0, 1, 0, 2_j,$$

$y = 2$, $k - y = 1$.

$$1_i, 0, 1, 0, 2_j,$$

$x = 1$, hodnota pozice$= 10000_{(3)} = 81$, Matěj nabízí úsek i až j včetně, Rado sníží:

$$0, 2, 0, 2, 1_j,$$

$y = 1$, $k - y = 2$.

$$0, 2_i, 0, 2, 1_j,$$

hodnota pozice$= 02000_{(3)} = 54$, Matěj nabízí úsek i až j včetně, ...

Poznámky opravujícího. Úlohu vyřešil pouze Filip Bialas s trochu složitější strategií, kde se rozhodl na střídačku rozlišit, zda chce danou číslici dostat na nulu „spodem“ nebo „vrchem“. Při odmyšlení této rozvernosti má stejný postup jako vzorové řešení.

Pak už se odvážil něco poslat pouze jeden řešitel s řešením pro $k = 3$, za což byl odměněn jedním bodem. Je trochu škoda, že vás ji neposlalo víc. Vždyť to byla úloha vyloženě hravá.

(Mirek Olšák)