

Riešenia 4. série

Úloha N4. Nájdite všetky polynómy P s celočíselnými koeficientami také, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b je $P(a) - P(b)$ násobkom čísla $a + b$.

Riešenie. Nech P je polynóm s celočíselnými koeficientami. Nech E je polynóm, ktorý pozostáva z členov párneho stupňa polynómu P . Nech O je polynóm, ktorý pozostáva z členov nepárneho stupňa polynómu P . Platí teda

$$\begin{aligned} P(x) &= E(x) + O(x) \\ E(x) &= E(-x) \\ O(x) &= O(-x) \end{aligned}$$

Nech $a, b \in \mathbb{N}$ a pozrime sa na situáciu modulo $a + b$.

$$P(a) - P(b) \equiv P(-b) - P(b) = -2O(-b) \pmod{a+b}$$

Teda ak O je nulový tak P rieši našu úlohu, lebo chceme aby táto kongruencia bola 0. V opačnom prípade ak si fixneme b a za a dosadíme $2|O(b)| + 1$ tak pre všetky b platí, že $0 \equiv -2O(b) \pmod{2|O(b)| + 1 + b}$. Čo nám dáva, že $2|O(b)| + 1 + b \mid -2O(b)$, pre všetky b ale ľahko vidno, že $2|O(b)| + 1 + b$ je v absolutnej hodnote viac než $-2O(b)$. Teda nutne $O(b) = 0$ pre všetky $b \in \mathbb{N}$. Z čoho plynie, že podmienky zo zadania spĺňajú tie polynómy, ktorých všetky členy sú párneho stupňa.

(Michal Pecho)

Úloha C4. Je dané prirodzené číslo $n \geq 3$ a konvexný n -uholník M . Uvažujme ofarbenie vrcholov M tromi farbami. Trojfarebným trojuholníkom rozumieme trojuholník, ktorého vrcholy sú vrcholy M a ktoré majú navzájom rôzne farby. Príslušné ofarbenie vrcholov M nazveme pekné, pokiaľ každý bod vnútri M zároveň leží v nejakom trojfarebnom trojuholníku.¹ Označme p_n počet pekných ofarbení konvexného n -uholníka. Dokážte, že p_n nezávisí na konkrétnej voľbe n -uholníka M a že pre $n \geq 3$ platí

$$p_{n+2} = p_{n+1} + 2p_n + 6.$$

Riešenie. My ukážeme, že obarvení je pekné práve tehdy, keď obsahuje všetky 3 farby a žiadne dva susední vrcholy nejsou obarveny stejnou barvou. Pokud by nějaké dva susední vrcholy A a B měly stejnou barvu, tak si jako $A' \neq B$ označíme souseda A a $B' \neq A$ souseda B . Potom ale body trojúhelníku ohraničeného přímkami AB , $A'B$ a AB' jsou pouze v trojúhelnících, co mají dva ze svých vrcholů A a B . Tyto trojúhelníky ale nejsou trojbarevné, takže máme spor.

Zjevné obarvení, které nepoužívá všechny 3 barvy, není pekné. Indukcí ukážeme, že pokud jsou v obarvení všechny 3 barvy a žádné dva susední vrcholy nemají stejnou barvu, tak je obarvení pekné. Pro $n = 3$ toto zjevně platí a předpokládejme, že tvrzení už máme dokázané pro k -úhelníky. Nyní ho dokážeme pro $(k + 1)$ -úhelníky. Protože obarvení obsahuje všechny 3 barvy a žádné dva susední vrcholy nemají stejnou barvu, tak musí existovat trojice za sebou jdoucích vrcholů A, B, C , která obsahuje všechny 3 barvy. Odstraněním vrcholu B získáme k -úhelník, který nemá dvojici susedních vrcholů stejné obarvenou. Pokud obsahuje stále všechny 3 barvy, tak z indukčního předpokladu jsou všechny body uvnitř tohoto mnohoúhelníku uvnitř nějakého trojbarevného trojúhelníku. Zároveň ale body uvnitř odstraněného trojúhelníku ABC

¹Je dovolené aj to, aby ležal len na obvoďte trojfarebného trojuholníka.

jsou uvnitř právě tohoto trojbarevného trojúhelníku ABC , tedy i původní $(k+1)$ -úhelník byl pěkně obarven.

Ještě se mohlo stát, že po odstranění bodu B nám vznikne k -úhelník, který obsahuje pouze 2 barvy a jimi obarven "na střídačku". Pak ale můžeme původní $(k+1)$ -úhelník rozdělit na trojbarevné trojúhelníky následovně. Každý trojúhelník bude mít jeden z vrcholů B a zároveň bude obsahovat hranu sousedících vrcholů neobsahujících B . Tím nám vznikne dokonce triangulace našeho $(k+1)$ -úhelníku složená pouze z trojbarevných trojúhelníků, tedy tento $(k+1)$ -úhelník naše tvrzení splňuje.

Všimněme si, že naše podmínka nezávisí na volbě konkrétního n -úhelníku. Stačí nám už tedy pouze ukázat rekurenci $p_{n+2} = p_{n+1} + 2p_n + 6$. Vezměme si libovolný $(n+2)$ -úhelník a jeho pěkná obarvení. Vyberme si jeden jeho vrchol X . Tento vrchol můžeme odstranit, čímž získáme nějaký $(n+1)$ -úhelník a jeho obarvení. Pokud je toto obarvení pěkné, tak už máme přesně určenou barvu vrcholu X díky podmínce, že žádné dva sousední vrcholy nemohou mít v pěkném obarvení stejnou barvu. Takovýchto obarvení je přesně p_{n+1} , protože k libovolnému obarvení vzniklého $(n+1)$ -úhelníku umíme přidat bod X .

Vzniklý $(n+1)$ -úhelník ale nemusí být obarvený pěkně. Mohlo se to stát dvěma různými způsoby. Odstraněný vrchol X mohl být jediný své barvy nebo vrcholy sousedící s X mají stejnou barvu. Nejprve se podívejme na to, co když $(n+1)$ -úhelník stále obsahuje všechny barvy, akorát má teď dva sousedící vrcholy stejné barvy. Jeden z těchto vrcholů můžeme odstranit. Tím nám vznikne n -úhelník, který obsahuje všechny 3 barvy a zároveň má sousední vrcholy různé barvy, tedy je pěkně obarvený. Těchto pěkných obarvení je p_n . Druhý odstraněný vrchol má pevně určenou barvu, ale vrcholu X můžeme přiřadit jednu ze dvou barev. Máme tak celkem $2p_n$ pěkných obarvení tohoto druhu.

Nakonec se tedy ještě mohlo stát, že $(n+1)$ -úhelník obsahuje už pouze 2 barvy. V původním $(n+2)$ -úhelníku měl tedy X nějakou barvu a zbylé vrcholy byly opět "na střídačku" obarveny zbylými dvěma barvami. Na barvu X máme 3 možnosti a pro každou volbu barvy X máme dvě možnosti, jak obarvit zbytek $(n+2)$ -úhelníku, tedy máme 6 možností.

Dohromady tak máme opravdu $p_{n+2} = p_{n+1} + 2p_n + 6$, jak jsme chtěli ukázat.

(Petr Hladík)

Úloha A4. Je dané prirodzené číslo $n \geq 2$ a reálné čísla $1 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ splňující $a_1 + \dots + a_n = 2n$. Pre každé $i = 1, \dots, n$ potom označme číslo $b_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_i$. Dokážte, že platí

$$b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_1 + 2 \leq b_n.$$

Riešenie. V obou uvedených řešeních relaxujeme podmínku ze zadání na $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$, tedy povolíme $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$. Ukážeme pak, že rovnost nastane pro $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 2$ a pro $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1, a_n = n + 1$.

V prvním řešení budeme postupovat indukcí podle čísla $n \geq 2$. Nejprve vyřešme základní krok pro $n = 2$, tedy pro čísla $1 \leq a_1 \leq a_2$ splňující $a_1 + a_2 = 4$ ukážeme nerovnost

$$a_1 + 2 \leq a_1 a_2.$$

Vyjádříme $a_2 = 4 - a_1$ a dosadíme

$$a_1 a_2 = a_1(4 - a_1) \geq a_1 + 2 \iff (a_1 - 1)(2 - a_1) \geq 0.$$

Poslední uvedená nerovnost platí, protože dle zadaného uspořádání je $a_2 \geq 2$ a tedy $a_1 \leq 2$. Rovnost tedy nastane pro $(a_1, a_2) = (2, 2)$ a $(a_1, a_3) = (1, 3)$.

Přesuňme se k indukčnímu kroku. Dejme tomu, že pro libovolnou n -tici čísel a_i splňujících zadání platí dokazovaná nerovnost. Uvažme pak libovolnou $(n+1)$ -tici $a_1, \dots, a_{n+1}$ splňující zadání pro $n+1$. Chceme ukázat, že platí

$$b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 + 2 \stackrel{?}{\leq} b_{n+1}.$$

Nyní sestrojíme z čísel $a_1, \dots, a_{n+1}$ novou posloupnost o n členech splňující podmínky ze zadání tak, aby co nejvýše b_i bylo mezi dvěma posloupnostmi stejných. Položme proto $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2, \dots, c_{n-1} = a_{n-1}$ a $c_n = a_n + a_{n+1} - 2$ a označme $d_i = c_1 \cdot c_2 \cdots c_i$. Poté $d_i = b_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Ukážeme nyní, že posloupnost $c_1, c_2, \dots, c_n$ splňuje podmínky ze zadání.

Nejprve jelikož a_{n+1} je ze všech a_i vůbec nejvyšší, tak vzhledem k podmínce $a_1 + \dots + a_{n+1} = 2(n+1)$ platí nerovnost $a_{n+1} \geq 2$. Proto platí

$$c_n = a_n + a_{n+1} - 2 \geq a_n \geq a_{n-1} = c_{n-1} \geq c_{n-2} \geq \dots \geq c_1 \geq 1.$$

Dále součet c_i je roven $c_1 + c_2 + \dots + c_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} - 2 = 2n$. Pro posloupnost $c_1, c_2, \dots, c_n$ proto platí dle indukčního předpokladu nerovnost

$$d_{n-1} + d_{n-2} + \dots + d_1 + 2 \leq d_n.$$

Tuto nerovnost si zapíšeme v řeci a_i a b_i

$$\begin{aligned} b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_1 + 2 &\leq d_n = b_{n-1}(a_n + a_{n+1} - 2), \\ b_n + b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_1 + 2 &\leq b_{n-1}(2a_n + a_{n+1} - 2). \end{aligned}$$

Konečně, ukážeme, že pravá strana nerovnosti je nejvýše rovna b_{n+1} . Platí $a_n \geq 1$ a již dříve bylo osvětleno $a_{n+1} \geq 2$, takže

$$0 \leq b_{n-1}(a_n - 1)(a_{n+1} - 2) \iff b_{n-1}(2a_n + a_{n+1} - 2) \leq b_{n-1}a_n a_{n+1} = b_{n+1},$$

platí proto

$$b_n + b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_1 + 2 \leq b_{n-1}(2a_n + a_{n+1} - 2) \leq b_{n+1}.$$

Jsme tedy hotovi. Rovnost nastane buď pro $a_n = 1$ a nebo $a_{n+1} = 2$, tyto dvě možnosti díky $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n+1}$ vedou na $(n+1)$ -tice $(1, 1, \dots, n+2)$, resp. $(2, 2, \dots, 2)$.

Jiné řešení. Díky podmínce $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ platí i $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Tyto řetězce nerovností motivují použít permutační nerovnost, resp. její důsledek *Chebyshevovu nerovnost*, která pro dvě uspořádané posloupnosti $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ a $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ tvrdí

$$n(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) \geq (x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n).$$

Rovnost nastane pokud platí buď $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ a nebo $y_1 = y_2 = \dots = y_n$.

Tuto nerovnost použijeme pro $x_1 = 1$ a $x_i = b_{i-1}$ pro $i \in \{2, \dots, n\}$. Abychom na obou stranách získali prvky tvaru b_i , položíme $y_i = a_i$, poté pro každé i platí $x_i y_i = b_i$, tedy

$$n(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \geq (1 + b_1 + \dots + b_{n-1})(a_1 + \dots + a_n) = 2n(1 + b_1 + \dots + b_{n-1}).$$

Po dělení n a přeuspořádání získáme dokazovanou nerovnost. Rovnost nastane ve dvou případech – jeden je $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 2$ a druhý $1 = b_1 = \dots = b_{n-1}$, což znamená $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = (1, 1, \dots, 1, n+1)$.

Poznámky opravovatele. Většina správných řešení postupovala jedním z uvedených postupů. (Zdeněk Pezlar)

Úloha G4. Je dané prirodzené číslo $n \geq 5$ a n -uholník $A_1 A_2 \dots A_n$ v rovine, ktorému je možné opísať kružnicu a zároveň aj vpísať kružnicu. Ďalej označme B_i priesečník priamok $A_{i-1} A_i$ a $A_{i+1} A_{i+2}$ (pri číslovaní vrcholov uvažujeme $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$ a pod.). Dokážte, že existuje kružnica, ktorá sa dotýka všetkých kružníc opísaných trojuholníkom $B_i A_i A_{i+1}$.

Riešenie. Střed kružnice opsané zadanému n -úhelníku označme O , střed kružnice vepsané označíme I . Dále střed kružnice opsané a B_i -švrčkův bod trojúhelníku $A_i B_i A_{i+1}$ postupně

označíme O_i a S_i . Potom všechny tři body O_i , S_i a O leží na jedné přímce, totiž ose $A_i A_{i+1}$, pro všechna i . Tedy kružnice se středem O a poloměrem $|OS_i|$ se dotýká kružnice opsané $A_i B_i A_{i+1}$, neboť pak S_i leží na obou těchto kružnicích. Naším cílem proto bude dokázat, že $|OS_i| = |OS_j|$ pro $1 \leq i, j \leq n$. K tomu nám stačí dokázat, že $|OS_i| = |OS_{i+1}|$ pro každé i , protože pak indukci snadno dokážeme $|OS_i| = |OS_j|$ pro libovolná i a j .

Označme T_i bod dotyku kružnice vepsané mnohoúhelníku a jeho strany $A_i A_{i+1}$. Protože I je střed této kružnice vepsané, je trojúhelník $T_i I T_{i+1}$ rovnoramenný se základnou $T_i T_{i+1}$, I leží na ose úhlu $A_i A_{i+1} A_{i+2}$ a $T_i T_{i+1}$ je na tuto osu kolmá.

Chceme dokázat, že $S_i O S_{i+1}$ je rovnoramenný. K tomu stačí, aby byl podobný trojúhelníku $T_i I S_{i+1}$, což dokážeme pomocí toho, že odpovídající strany těchto dvou trojúhelníků jsou rovnoběžné.

Protože O i S_i leží na ose $A_i A_{i+1}$, je $OS_i \perp A_i A_{i+1}$. Také $IT_i \perp A_i A_{i+1}$, tedy $OS_i \parallel IT_i$. Obdobně dokážeme, že $IT_{i+1} \perp A_{i+1} A_{i+2}$.

Zbývá dokázat, že $T_i T_{i+1}$ je rovnoběžná s $S_i S_{i+1}$. Uvědomíme si, že I je buď střed kružnice vepsané nebo B_i -připsané trojúhelníku $A_i B_i A_{i+1}$. V obou případech I leží na kružnici se středem S_i , na níž leží A_i a A_{i+1} . Tudíž S_i leží na osách úseček IA_i a IA_{i+1} . Tím pádem S_i i S_{i+1} leží na ose $A_{i+1} I$. Protože $A_{i+1} I$ je osa úhlu $A_i A_{i+1} A_{i+2}$, je na ni kolmá úsečka $T_i T_{i+1}$. Tedy $T_i T_{i+1} \parallel S_i S_{i+1}$, přesně jak jsme chtěli.

Tímto jsme dokázali, že $|OS_i| = |OS_{i+1}|$, tedy existuje kružnice s středem O procházející S_i pro všechna i . Tato kružnice se bude dotýkat kružnic opsaných $A_i B_i A_{i+1}$, což je přesně to, co jsme chtěli.

Poznámky opravovatele. Druhý možný postup byl invertovat podle kružnice vepsané. Tato inverze totiž má několik zajímavých vlastností. Bod B_i se zobrazí na T_i definovaný výše, body A_i se zobrazí na střed $T_i T_{i+1}$. Následně se využije toho, že poloměr Feuerbachovy kružnice je poloviční oproti poloměru kružnice opsané, čímž se situace značně zpřehlední. Avšak přesto byl tento postup složitější než ten popsany ve vzorovém řešení, a tak se do něj také pustila menšina řešitelů. (Majda Mišinová)