

Řešení 3. série

Úloha G3. Necht ω, ω_a jsou postupně kružnice opsaná a kružnice připsaná straně BC v trojúhelníku ABC . Společné tečny ω, ω_a protínají přímkou BC v bodech P, Q . Dokažte, že $|\angle PAB| = |\angle CAQ|$.

Řešení. Nech dotyčnice ku kružnici ω procházejícíce cez P a Q sa jej v bodech P' a Q' ; nech S je stred oblúka BC a I_A je stred ω_a . Keďže dotyčnica k ω v bode S je rovnobežná s BC , tak máme, že priamka $P'S$ je rovnobežná s vonkajšou osou uhla $\angle BPP'$. Keďže ω_a a sa dotýka priamok BC a PP' , vieme, že PI_A je vonkajšou osou uhla $\angle BPP'$. Teda $P'L \parallel PI_A$. Teraz ukážeme, že štvoruholník $PP'AI_A$ je tetivový (a teda aj $QQ'AI_A$), čo plynie z predchádzajúceho pozorovania o rovnobežkách:

$$\angle PP'A = \angle P'LA = \angle PI_AA.$$

Napokon,

$$\angle PAI_A = \angle PP'I_A = \angle I_AQ'Q = \angle I_AAQ,$$

čím sme hotoví.

(Adam Džavoronok)

Úloha C3. Každé políčko mřížky $n \times n$ je obarveno jednou z $n + 1$ barev. Políčko je různorodé, pokud se dohromady v jeho řádce a sloupci vyskytuje každá barva alespoň jednou. Určete maximální možný počet různorodých políček.

Řešení. Nech $f(n)$ značí maximální počet různorodých políček. Ukážeme, že platí $f(n) = \max\{n^2 - n, n^2 - 4\}$ resp. $f(n) = n^2 - 4$ pre $n \geq 4$, $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 6$.

Pre spor predpokladajme, že $f(n) \geq \max\{n^2 - (n - 1), n^2 - 3\}$ pre nejaké n . Pokiaľ by nejakou farbou bolo ofarbených menej ako $n - 1$ políček, mali by sme dva stĺpce a dva riadky, kde táto farba nie je. Na štyroch prienikoch by sme mali nerôznorodé políčka, čo je v spore s tým, že $f(n) \geq n^2 - 3$. Preto je z každej farby ofarbených aspoň $n - 1$ políček, a keďže $(n - 1)(n + 1) = n^2 - 1$, tak nutne máme n políček z jednej farby a $n - 1$ políček z ostatných farieb - označme si túto farbu A .

Z nerovnosti $f(n) \geq n^2 - (n - 1)$ dostávame, že existuje riadok R a stĺpec S , ktoré obsahujú iba rôznorodé políčka. Keďže v riadkoch a stĺpcoch je menej políček než koľko je farieb, tak aj R a S neobsahujú jednu z farieb. Pokiaľ by to bola rovnaká farba, políčko v ich prieniku by nemohlo byť rôznorodé. Bez ujmy na všeobecnosti, vieme predpokladať, že R neobsahuje farbu B , ktorá je rôzna od A . Z farby B ale máme iba $n - 1$ políček, teda existuje stĺpec S' , ktorý ju neobsahuje. Na prieniku R a S' je teda nerôznorodé políčko, čo je spor s tým, že riadok bol rôznorodý. Tým sme došli ku sporu, teda $f(n) \leq \max\{n^2 - n, n^2 - 4\}$.

Už stačí len nájsť konštrukciu. Pre $n \leq 4$ je $\max\{n^2 - n, n^2 - 4\} = n^2 - n$, teda potrebujeme konštrukciu na $n^2 - n$. Na to stačí umiestniť $(n + 1)$ -vú farbu do všetkých políček v spodnom riadku a zvyšok ofarbiť tak, že políčka v i -tom stĺpci budú mať farbu i . Políčka mimo posledného riadku budú vo svojom riadku obsahovať n farieb a tú poslednú budú mať vo svojom stĺpci. Preto všetkých $n^2 - n$ políček bude rôznorodých.

Pre $n > 4$ treba nájsť konštrukciu na $n^2 - 4$. Uvažujme $(n - 2) \times (n - 2)$ štvorec úplne vľavo hore tabuľky. Ten vyfarbíme $n - 2$ farbami tak, aby každý riadok aj každý stĺpec obsahoval každú farbu. To sa dá spraviť napríklad tak, že ofarbíme i -tu uhlopriečku modulo $n - 2$ farbou i . Štvorec 2×2 vpravo dole ofarbíme za radom farbami $n, n + 1, n, n + 1$. Vo zvyšku tabuľky ofarbíme predposledný riadok a predposledný stĺpec farbou $n - 1$, posledný riadok farbou n a posledný stĺpec farbou $n + 1$. Každé políčko okrem 2×2 štvorca vpravo dole obsahuje v riadku alebo stĺpci prvých $n - 2$ farieb. Rovnako farbu $n - 1$. Farby n a $n + 1$ sú v každom stĺpci resp.

v každom riadku. Teda všetkých $n^2 - 4$ políčok mimo 2×2 štvorca vpravo dole tabuľky bude rôznorodých

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

(Jakub Šošovička)

Úloha A3. Je dáno kladné celé číslo n , nechť D je množina všech kladných celočíselných dělitelů n . Podmnožiny $A, B \subseteq D$ splňují podmínku, že pro libovolné $a \in A$ a $b \in B$ platí, že $a \nmid b$ a $b \nmid a$. Ukažte, že

$$\sqrt{|A|} + \sqrt{|B|} \leq \sqrt{|D|}.$$

Řešení. Zdefinujeme si

$$V = \bigcup_{a \in A} \{\text{delitelia } a\} \quad \text{a} \quad W = \bigcup_{a \in A} \{\text{násobky } a\} \cap D$$

Dokážeme indukciou na počte prvočíselných deliteľov n , že $|V| \cdot |W| \geq |A| \cdot |D|$, pričom prípad $n = 1$ je triviálny.

Pre indukčný krok si vezmime prvočíslo $p \mid n$. Pre ľubovoľnú množinu S nech $S_i = \{s \in S \mid \nu_p(s) = i\}$. Potom definujeme $|V_0| \geq |V_1| \geq \dots \geq |V_n|$ a $|W_0| \leq |W_1| \leq \dots \leq |W_n|$. Podľa Chebyshevej nerovnosti a indukčného predpokladu platí

$$\begin{aligned} |V| \cdot |W| &= \left(\sum_{i=0}^n |V_i| \right) \left(\sum_{i=0}^n |W_i| \right) \geq (n+1) \sum_{i=0}^n |V_i| \cdot |W_i| \\ &\geq (n+1) \sum_{i=0}^n |A_i| \cdot |D_i| = |D| \sum_{i=0}^n |A_i| = |A| \cdot |D|, \end{aligned}$$

kde sme využili, že $|D_i| = \frac{|D|}{n+1}$, lebo prvok z D_{i+1} dostanem pre násobením každého prvku z D číslom p .

Nech B je pevné. Môžeme potom predpokladať, že pre každé $d \in D$, ak d má deliteľa a násobok v A tak potom $d \in A$, keďže d nemôže byť už v B zo zadanej podmienky. Následne zahrnutím d do A len dokážeme silnejšiu nerovnosť. Potom $V \cap W = A$ a $|V \cup W| \leq |D| - |B|$, takže

$$|D| - |B| + |A| = |V| + |W| \geq 2\sqrt{|V| \cdot |W|} \geq 2\sqrt{|A| \cdot |D|},$$

čo sa upraví na požadovaný tvar.

(Matej Vasky)

Úloha N3. Najdte všechna celá čísla $n \geq 1$ taková, že $2^n - 1$ má přesně n kladných celočíselných dělitelů.

Řešení. Vyřešíme najskôr prípad, ak n je nepárne. Aby malo číslo $2^n - 1$ nepárny počet deliteľov, muselo by byť štvorec. Avšak pre $n \geq 2$ má toto číslo zvyšok $-1 \equiv 3 \pmod{4}$, ale druhé mocniny majú iba zvyšky 0 a 1, takže sa to môže stať len pre $n = 1$. Overíme, že $n = 1$ je naozaj riešením.

Ďalej nech n je párne. Zapišme si n v tvare $2^k b$, kde b je nepárne. Potom pomocou vzorca $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ môžeme opakovane rozložiť

$$\begin{aligned} 2^{2^k b} - 1 &= (2^{2^{k-1} b} + 1)(2^{2^{k-1} b} - 1), \\ 2^{2^k b} - 1 &= (2^{2^{k-1} b} + 1)(2^{2^{k-2} b} + 1)(2^{2^{k-2} b} - 1), \\ &\vdots \\ 2^{2^k b} - 1 &= (2^{2^{k-1} b} + 1)(2^{2^{k-2} b} - 1) \dots (2^{2^1 b} + 1)(2^{2^0 b} + 1)(2^{2^0 b} - 1), \end{aligned}$$

Pri prvom rozklade máme zátvorky $(2^{2^{k-1} b} + 1)(2^{2^{k-1} b} - 1)$, ktoré majú rozdiel 2, ale obe sú nepárne, preto sú nesúdeliteľné. To platí aj pri každom rozklade, a keď rozložíme zátvorku nesúdeliteľnú s predchádzajúcou, tak aj novovzniknuté zátvorky budú nesúdeliteľné s tou predchádzajúcou aj medzi sebou (aplikujeme to isté pre $k - 1$).

Preto vo výsledku máme $k + 1$ zátvoriek a všetky sú po dvoch nesúdeliteľné. Počet deliteľov $d(m)$ je multiplikatívny pre nesúdeliteľné vstupy, teda $d(ab) = d(a)d(b)$, ak a a b sú nesúdeliteľné. Chceme, aby platilo

$$n = 2^k b = d(2^{2^k b} - 1) = d(2^{2^{k-1} b} + 1)d(2^{2^{k-2} b} - 1) \dots d(2^{2^1 b} + 1)d(2^{2^0 b} + 1)d(2^{2^0 b} - 1).$$

Ak by všetky členy na pravej strane boli párne, pravá strana by mala v prvočíselnom rozklade aspoň $k + 1$ dvojok, ale ľavá ich má iba k . Takže aby platila rovnosť, musí byť niektorý člen – počet deliteľov – napravo nepárny, a teda jeho argument musí byť druhá mocnina.

Už vieme, že zátvorka s mínusom (tvaru $2^x - 1$) je štvorec iba pre $x = 1$, teda $b = 1$. Ak by bolo $k \geq 6$, tak je prítomná zátvorka $2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$, ktorá má 4 delitele. Teda aj tak na pravej strane bude v súčine dvojka navyše, bude viac dvojok ako zátvoriek bez tej $(2^1 - 1)$ a rovnosť nebude platiť. Pre $k \leq 5$ dostávame riešenia:

- $k = 1, n = 2^1 = 2, 2^2 - 1 = 3$ má $2^1 = 2$ deliteľov 1, 3.
- $k = 2, n = 2^2 = 4, 2^4 - 1 = 15$ má $2^2 = 4$ deliteľov 1, 3, 5, 15.
- $k = 3, n = 2^3 = 8, 2^8 - 1 = 255$ má $2^3 = 8$ deliteľov.
- $k = 4, n = 2^4 = 16, 2^{16} - 1 = 65535$ má $2^4 = 16$ deliteľov.
- $k = 5, n = 2^5 = 32, 2^{32} - 1 = 4294967295$ má $2^5 = 32$ deliteľov.

Čísla $2^{2^j} + 1$, ktoré vystupujú v rozklade, sú známe ako Fermatove prvočísla. Známy matematik Fermat sa svojho času domnieval, že všetky čísla tohto tvaru sú prvočísla, ale ako sme videli, už pre $j = 5$ dostávame zložené číslo. Každé má dvoch deliteľov, preto v súčine na pravej strane dostávame 2^k .

Podľa sa teraz pozrieme, kedy môže byť zátvorka s plusom (tvaru $2^x + 1$) štvorec. Máme

$$\begin{aligned} 2^x + 1 &= y^2, \\ 2^x &= y^2 - 1, \\ 2^x &= (y - 1)(y + 1). \end{aligned}$$

Obe zátvorky na pravej strane musia byť mocniny dvoch, ale ľšia sa o dva, takže to musia byť 2 a 4. To nám dáva $2^x = 8$ a $x = 3$. Teda jediná takáto zátvorka, ktorá môže byť štvorec, je $(2^{2^0} + 1)$ pre $b = 3$. Avšak ak $k \geq 2$, je prítomná zátvorka $2^{2^1} \cdot 3 + 1 = 65 = 5 \cdot 13$, ktorá má 4 delitele. Takže opäť na pravej strane bude v súčine dvojka navyše a rovnosť nebude platiť. Musíme teda overiť $k = 1$, čo nám dáva posledné riešenie $n = 2^1 \cdot 3 = 6$, pre ktoré $2^6 - 1 = 63 = 3^2 \cdot 7$ má 6 deliteľov 1, 3, 7, 9, 21, 63.

Riešenia úlohy sú teda čísla 1, 2, 4, 6, 8, 16, 32.

(Michal Staník)