Riešenia 4. série

Úloha C4. *Pavel má orientovaný graf G s nekonečno vrcholmi. Nech pre každý vrchol platí, že počet hrán z neho vychádzajúcich je väčší, ako počet hrán do neho vchádzajúcich. O je fixný vrchol G. Pre ľuvoboľné prirodzené číslo n označme V_n počet vrcholov, ktoré môžu byť dosiahnuté z O prechodom cez nanajvýš n hrán (O sa počíta). Nájdite najmenšiu možnú hodnotu V_n.*

Riešenie. Graf G rozdělme do vrstev podle vzdálenosti od O. Označme L_i množinu vrcholů, které jsou od O vzdáleny i (nejkratší cesta z O do každého vrcholu $U \in L_i$ obsahuje i hran). Dále ukažme, že pokud uvážíme množinu vrcholů H, bude z ní vycházet alespoň $|H|$ hran. Sečtením rozdílů počtu výstupních a vstupních hran přes všechny vrcholy $U \in H$ dostaneme rozdíl počtu hran vycházejících a vcházejících do H. Každý vrchol přidá do celkového součtu alespoň 1, proto je rozdíl počtu hran vycházejících a vcházejících do H alespoň $|H|$ a z H tedy vychází alespoň $|H|$ hran.

Dále budeme postupovat pomocí indukce, přičemž budeme rozlišovat lichá a sudá n. Předpokládejme, že $V_{2i} \geq i^2 + 2i + 1$ a $V_{2i+1} \geq i^2 + 3i + 2$ pro všechna $0 \leq i < k$ a dokažme to pro k. Zřejmě $V_0 \geq 1$ a $V_1 \geq 2$.

Nejprve sudá n. Rozmysleme si, že všechny hrany, vycházející z množiny

$$L_0 \cup L_1 \cup \cdots \cup L_{2k-1},$$

vedou z vrstvy L_{2k-1} do vrsty L_{2k}. Z indukčního předpokladu tedy pro počet hran p, vedoucí mezi vrstvami L_{2k-1} a L_{2k}, musí platit

$$p \geq V_{2k-1} \geq (k-1)^2 + 3(k-1) + 2 = k^2 + k = k(k+1).$$

Přitom ale mezi každou dvojicí vrcholů v daných dvou vrstvách L_{2k-1}, L_{2k} vede nejvýše jedna hrana, proto $|L_{2k-1}| \cdot |L_{2k}| \geq p \geq k(k+1)$. Z této podmínky zřejmě součet $|L_{2k-1}| + |L_{2k}|$ nabývá minimální hodnoty pro $\{|L_{2k-1}|, |L_{2k}|\} = \{k, k+1\}$, pročež $|L_{2k-1}| + |L_{2k}| \geq 2k+1$. Dostáváme $V_{2k} = V_{2k-2} + |L_{2k-1}| + |L_{2k}| \geq k^2 + 2k + 1$.

Důkaz pro lichá n funguje analogicky: mezi vrstvami L_{2k} a L_{2k+1} musí vést alespoň $V_{2k} \geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ hran, proto $|L_{2k}| \cdot |L_{2k+1}| \geq (k+1)^2$. Součet $|L_{2k}| + |L_{2k+1}|$ je minimální pro $|L_{2k}| = |L_{2k+1}| = k+1$, takže $|L_{2k}| + |L_{2k+1}| \geq 2k+2$. Dostáváme $V_{2k+1} = V_{2k-1} + |L_{2k}| + |L_{2k+1}| \geq k^2 + 3k + 2$.

Ještě musíme ukázat, že opravdu existuje graf G, kde $V_{2k} = k^2+2k+1$ a $V_{2k+1} = k^2+3k+2$. Vyhovuje graf, který má v $(2k)$-té a $(2k+1)$-té vrstvě $k+1$ vrcholů (neboli $|L_{2k}| = |L_{2k+1}| = k+1$) a dvě po sobě jdoucí vrstvy vždy tvoří úplný bipartitní graf (z každého vrcholu $U \in L_k$ vrstvy vede hrana do každého vrcholu $W \in L_{k+1}$).

(Peter Súkeník)

Úloha N4. *Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré spĺňajú nasledujúce rovnosti:*

$$f(x,x) = x, \tag{1}$$

$$f(x,y) = f(y,x), \tag{2}$$

$$(x+y)f(x,y) = yf(x,x+y), \tag{3}$$

pre všetky usporiadané dvojice $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Riešenie. Pozrime sa na úlohu nasledovne. Chceme zistiť hodnotu $f(a,b)$ pre nejaké konkrétne a, b. Ak $a = b$, z rovnice (1) máme $f(a,a) = a$. Ďalej ak sa a, b nerovnajú, podľa druhej rovnice je funkcia f symetrická, takže môžeme predpokladať $a < b$.

Teraz si všimnime, že vďaka rovnici (3) je hodnota funkcie $f(a,b)$ jednoznačne určená podľa funkčných hodnôt v menších argumentoch. Konkrétne, keď zvolíme $x=a$, $y=b-a$ (x, y budú naozaj prirodzené), dostaneme

$$bf(a,b-a)=(b-a)f(a,b),$$
$$f(a,b)=\frac{bf(a,b-a)}{b-a}. \tag{4}$$

Vidíme, že hodnota $f(a,b)$ je jednoznačne určená. Takto isto je každá hodnota našej funkcie jednoznačne určená. Formálne sa to dokáže napríklad indukciou podľa súčtu $x+y$. Predpokladáme, že $f(x,y)$ je jednoznačne určené pre všetky $x+y<S$ (Pre $S=3$ to zjavne platí). Potom pre $x+y=S$ máme vo vzťahu (4) pravú stranu jednoznačne určenú, lebo pre $f(x,y-x)$ platí $x+(y-x)=y<S$, takže aj $f(x,y)$ je jednoznačne určené.

Z toho vyplýva, že môže existovať najviac jedna funkcia vyhovujúca zadaniu. Ukážeme, že funkcia $\mathrm{nsn}(x,y)$ (najmenší spoločný násobok) vyhovuje, a teda je jediným riešením. Prvé dve podmienky zjavne spĺňa, overíme ešte tretiu. Označme $\mathrm{NSD}(x,y)=d$, potom $x=dX$, $y=dY$, kde X, Y sú nesúdeliteľné. Dosaďme do (3), s využitím, že $X, X+Y$ sú tiež nesúdeliteľné:

$$d(X+Y)\,\mathrm{nsn}(dX,dY)=d^2(X+Y)XY=dY\,\mathrm{nsn}(dX,d(X+Y))$$

Poznámka: Na to, že ide práve o funkciu $\mathrm{nsn}(x,y)$, sa dalo prísť buď dosadením malých hodnôt a uhádnutím, alebo pomocou vzťahov, ktoré sme dostali. Napríklad sme vyjadrili $f(a,b)$ pomocou $f(a,b-a)$, čo sa podobá na Euklidov algoritmus, a teda je prirodzená súvislosť s najväčším spoločným deliteľom. *(Tomáš Sásik)*

Úloha G4. *Kružnice ω a Ω sa pretínajú v bodoch A a B. Nech M je stred oblúku AB na kružnici ω (M leží vo vnútri Ω). Tetiva MP kružnice ω pretína Ω v Q (Q leží vnútri ω). Nech ℓ_P je dotyčnicou k ω v P a nech ℓ_Q je dotyčnicou k Ω v Q. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku vytvorenému priamkai ℓ_P, ℓ_Q a AB sa dotýka Ω v práve jednom bode.*

Riešenie.

Nechť (XYZ) značí kružnici opsanou trojúhelníku XYZ a $p(X,k)$ mocnost bodu X ke kružnici k.

BÚNO nechť P,Q leží v téže polorovině vzhledem ke kolmici na AB skrz bod M jako bod B (tj. nechť jsou P,Q blíže k B, než k A, tak jako v náčrtku). Průsečíky ℓ_P a ℓ_Q, AB a ℓ_P, AB a ℓ_Q nazvěme po řadě C, D, E. Přímka PQ nechť protíná AB v L a kružnici Ω podruhé v F.

Ukažme, že trojúhelník LPD je rovnoramenný se základnou LP. Jelikož je M středem kratšího oblouku AB na ω, musí PL, resp. PM být osou $\sphericalangle APB$. Z toho využitím úsekového úhlu

$$|\sphericalangle LPD|=|\sphericalangle BPD|+|\sphericalangle LPB|=|\sphericalangle BAP|+|\sphericalangle LPA|=|\sphericalangle DLP|\,.$$

Budiž nyní K druhým průsečíkem DF s kružnicí Ω. Postupně ukážeme, že K leží na (CDE) a je jejím dotykovým bodem s Ω. Jistě platí

$$|PD|^2=p(D,\omega)=|AD|\cdot|BD|=p(D,\Omega)=|FD|\cdot|KD|, \tag{5}$$

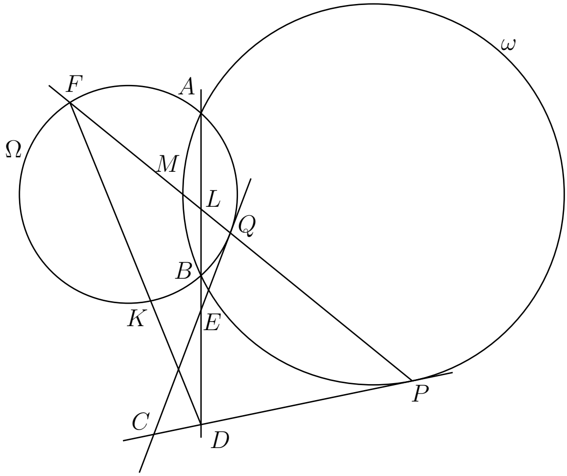
z čehož $\frac{|PD|}{|KD|}=\frac{|FD|}{|PD|}$, neboli jsou díky sdílenému úhlu trojúhelníky PKD a FPD podobné. Z toho

$$|\sphericalangle DKP|=|\sphericalangle DPF|=|\sphericalangle DPL|=|\sphericalangle DLP|\,,$$

neboli je $PDKL$ tětivový čtyřúhelník.

Dále z rovnice (5) musí PD být tečnou kružnice (FPK). Zároveň díky $|PD|=|LD|$ platí

$$|FD|\cdot|KD|=|PD|^2=|LD|^2,$$



neboli je LD tečnou (FLK). Z toho už úsekovými úhly plyne

$$|\sphericalangle KLE| = |\sphericalangle KLD| = |\sphericalangle KFL| = |\sphericalangle KFQ| = |\sphericalangle KQE|\,,$$

neboli je $QEKL$ tětivový čtyřúhelník. Jenže dohromady také

$$|\sphericalangle KQC| = |\sphericalangle KQE| = |\sphericalangle KLE| = |\sphericalangle KLD| = |\sphericalangle KPD| = |\sphericalangle KPC|\,,$$

neboli je i $PCKQ$ tětivový.

Ukažme nyní, že K leží na (CDE). S využitím všech tří získaných tětivových čtyřúhelníků totiž platí

$$\begin{aligned}|\sphericalangle CKE| &= |\sphericalangle CKQ| - |\sphericalangle EKQ| = 180^\circ - |\sphericalangle CPQ| - |\sphericalangle ELQ| = \\ &= 180^\circ - |\sphericalangle DPL| - |\sphericalangle DLP| = |\sphericalangle PDL| = 180^\circ - |\sphericalangle CDE|\end{aligned}$$

(K přitom zřejmě leží v opačné polorovině vzhledem k CE než D).

Konečně ukažme, že (CDE) a Ω se dotýkají. K tomu postačí dokázat, že mají v K společnou tečnu. Z definice K víme, že F, K, D leží v jedné přímce. Přitom pokud by tečna k (CDE) v K svírala s KD týž úhel, jako svírá tečna k Ω v K s KF, byly by tyto dva úhly vrcholové a zmíněné tečny by tak musely splývat. K dovršení úlohy tedy stačí dokázat rovnost těchto dvou úhlů, které jsou ale z věty o úsekovém úhlu rovny po řadě $|\sphericalangle DCK|$ a $|\sphericalangle FQK|$. S tětivovými čtyřúhelníky, které máme k dispozici, už pak snadno doúhlíme

$$|\sphericalangle DCK| = 180^\circ - |\sphericalangle DEK| = |\sphericalangle KEL| = |\sphericalangle KQL| = |\sphericalangle KQF|\,.$$

Tímto je řešení úlohy hotovo – (CDE) a Ω se nutně musí dotýkat v bodě K.

(Ákos Záhorský)

Úloha A4. *Existujú také polynómy P, Q so stupňom aspoň 2018, ktoré spĺňajú $P(Q(x)) = 3Q(P(x)) + 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$?*

Riešenie. Finta je v tom, že ak máme nejaké vyhovujúce riešenie $[P(x), Q(x)]$, tak vyhovujú aj dvojice $[P(x), Q(P(x))]$ a $[P(Q(x)), Q(x)]$:

Predpokladajme, že pre $y \in \mathbb{R}$ platí

$$P(Q(y)) = 3Q(P(y)) + 1$$

Dosadením $y = P(x), x \in \mathbb{R}$

$$P(Q(P(x))) = 3Q(P(P(x))) + 1$$

Čo je presne to, čo hľadáme. Analogicky pre $y = Q(x)$ dostaneme druhú dvojicu.

Preto ak nájdeme nejakú vhodnú dvojicu, tak vieme stupeň polynómov postupne zväčšovať koľko chceme. Vhodnou je napríklad kvadratický a lineárny polynóm.

Teraz už len zaťať zuby a dúfať že nejaké malé polynómy nájdeme napríklad dosadením všeobecného tvaru a porovnaním koeficientov pri rovnakých členoch. Naozaj, pre $P(x) = 2x^2 + 2x$ a $Q(x) = 3x + 1$ uvedená rovnosť platí. *(Miro Psota)*