Řešení 5. série

Úloha A5. *Nechť $n \geq 2$ je kladné celé číslo. Pro libovolná kladná celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dokažte nerovnost*

$$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_3^2}{a_4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Řešení. Ukážeme si, že pre ľubovoľné dve kladné celé čísla a, b platí $\left\lfloor \frac{a^2}{b} \right\rfloor \geq 2a-b$. Keďže $2a-b$ je celé číslo, stačí ukázať $\frac{a^2}{b} \geq 2a-b$. Vieme, že platí $(a-b)^2 \geq 0$ a jednoduchými úpravami dostávame

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &\geq 0,\\ a^2 &\geq 2ab - b^2,\\ \frac{a^2}{b} &\geq 2a-b,\end{aligned}$$

takže platí $\left\lfloor \frac{a^2}{b} \right\rfloor \geq 2a-b$. To použijeme a dostávame

$$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_3^2}{a_4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geq 2a_1 - a_2 + 2a_2 - a_3 + \cdots + 2a_n - a_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

čo sme chceli dokázať. *(Zdeněk Pezlar)*

Úloha N5. *Rozhodněte, pro která kladná celá čísla a, b splňující $a \geq 2b$ existuje nekonstantní polynom $P(x)$ s koeficienty z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ splňující $P(b) \mid P(a)$.*

Řešení. Ukážeme, že polynom s hledanými vlastnosti existuje pro všechna kladná celá čísla a, b splňující $a \geq 2b$ a $b \geq 2$.

Nejprve vyloučíme případ $b = 1$. Pro něj totiž množina $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ obsahuje pouze 0, tedy jediný polynom s koeficienty z této množiny je konstantní polynom $P(x) = 0$.

Nyní uvažme $b \geq 2$. Je známo, že pro taková b existuje (poziční) číselná soustava o základu b, specificky lze každé kladné celé číslo n jednoznačně vyjádřit jako $c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + \cdots + c_0$ pro nějaké kladné celé číslo m a koeficienty $c_m, c_{m-1}, \ldots, c_0$ z množiny $\{0, 1, \ldots, b-1\}$. Uvažme takovýto zápis čísla $a-b$, tedy čísla m a $c_m, c_{m-1}, \ldots, c_0$ taková, jak jsou popsána výše, splňující

$$a - b = c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + \cdots + c_0.$$

Uvažme polynom $P(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_0$. Víme tedy, že $P(b) = a - b$. Tento polynom je nekonstantní, jelikož $P(b) = a-b \geq b$ ze zadané podmínky a pro konstantní polynom $P(x) = c_0$ je $P(b)$ číslo z množiny $\{0, 1, \ldots, b-1\}$.

Je známo, že pro celá čísla m, n a polynom Q s celočíselnými koeficienty $m-n \mid Q(m)-Q(n)$. Proto i $P(b) = a-b \mid P(a) - P(b)$, a jelikož zřejmě $P(b) \mid P(b)$, platí i $P(b) \mid P(a)$, jak jsme chtěli.

Poznámky opravujícího. Dvě třetiny všech řešení opomněly případ $b = 1$, pro který řešení s číselnou soustavou selhává.

(Michal Janík)

Úloha C5. *Nechť $m \leq 2024$ je kladné celé číslo. Michal a Matěj hrají hru na tabulce o rozměrech 1×2024, jejíž políčka jsou původně bílé barvy. Hráči se střídají v tazích a začíná Michal. Každý Michalův tah spočívá v tom, že si vybere libovolných $k \leq m$ bílých políček v tabulce a natře je všechna na černo. Následně si Matěj ve svém tahu vybere několik sousedících černých políček a* *přetře je všechna na bílo. Jaká je nejmenší hodnota m, pro kterou Michal může zaručit, že po jednom z jeho tahů bude celá tabulka natřena černě?*

Řešení.

Ukážeme, že hľadané m je rovné 88.

Pre $m \geq 88$ bude Michal postupovať tak, že si rozdelí políčka na 45 súvislých blokov dĺžky 44 a medzi každými dvomi blokmi nechá jedno voľné políčko. Týchto medzier bude teda 44. To je dokopy $45 \cdot 44 + 44 = 2024$ políčok. Bloky budú teda tvorené políčkami 1 až 44, 46 až 89, ..., 1981 až 2024.

V prvých niekoľkých ťahoch si vždy vyberie 88 políčok, ktoré sú v niektorom bloku a sú biele, a zafarbí ich na čierno. Matěj potom prefarbí najviac 44 políčok naspäť na bielo, pretože viac ich súvislých nebude. Michal vždy zafarbí viac políčok, ako Matěj odfarbí, preto po konečnom počte ťahov budú všetky políčka vnútri blokov biele.

V ďalšom ťahu Matěj znovu odfarbí najviac 44 políčok. Potom Michal vie zafarbiť týchto 44 políčok a 44 medzier medzi blokmi, čím zafarbí celú tabuľku na čierno.

Ostáva ukázať, že pre $m \leq 87$ Matěj vie Michalovi v zafarbení celej tabuľky zabrániť. Michal určite nevyhrá jedným ťahom. Matějova stratégia bude jednoduchá. Po každom Michalovom ťahu prefarbí na bielo najdlhší súvislý úsek čiernych políčok. Ukážeme, že po tomto ťahu ostane aspoň 88 bielych políčok, a teda po žiadnom Matějovom ťahu Michal nevyhrá, a teda nevyhrá nikdy.

Nech Michal práve dokončil svoj ťah a ostalo b bielych políčok. To znamená, že máme $(2024 - b)$ čiernych políčok, ktoré tvoria najviac $b + 1$ súvislých úsekov. Každé dva úseky musia byť oddelené bielym políčkom (na kraji nemusia), ale úsekov môže byť aj menej. Najdlhší úsek má preto dĺžku d, ktorá je rovná aspoň priemernej dĺžke bieleho úseku:

$$d \geq \frac{2024 - b}{\text{počet čiernych úsekov}} \geq \frac{2024 - b}{b + 1} = \frac{2025}{b + 1} - 1.$$

Po Matějovom ťahu je počet bielych políčok $b + d$. S využitím AG-nerovnosti, ktorá nám pre nezáporné čísla $x = \frac{2025}{b+1}$ a $y = b + 1$ hovorí, že $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, dostávame:

$$b + d \geq b + \frac{2025}{b + 1} - 1 = \frac{2025}{b + 1} + (b + 1) - 2 \geq 2\sqrt{2025} - 2 = 2 \cdot 45 - 2 = 88,$$

teda naozaj ostane aspoň 88 bielych políčok, ktoré Michal nevie v jednom svojom ťahu zafarbiť (a po ďalšom Matějovom ťahu sa situácia zopakuje).

(Michal Staník)

Úloha G5. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Najděte množinu bodů P takových, že množina délek $\{|AP|, |BP|, |CP|\}$ jednoznačně určuje délku strany trojúhelníka ABC, tedy neexistuje rovnostranný trojúhelník XYZ jiné délky strany, který by splňoval*

$$\{|AP|, |BP|, |CP|\} = \{|XP|, |YP|, |ZP|\}.$$

Řešení. Dokážeme, že hľadanou množinou bodov je kružnica opísaná trojuholníku ABC a jej stred.

Najprv ukážeme, že ostatné body nevyhovujú.Nech O je stred kružnice opísanej ABC. Vezmime si bod P neležiaci na kružnici ani v jej strede a uvážme jeho obraz P' v kružnicovej inverzii podľa (ABC). Z prepočítavacieho lemmatu platí $\frac{AP'}{AP} = \frac{OA}{OP} = \frac{BP'}{BP} = \frac{CP'}{CP}$. Následne uvážme rovnoľahlosť so stredom v O a koeficientom $\frac{OP}{OA} \neq 1$. Tá nám zobrazí ABC na $A'B'C'$ (ktorý má inú dĺžku strany) a bod P' na bod P''. Potom platí $A'P'' = AP$, $B'P'' = BP$, $C'P'' = CP$, čím sme ukázali, že body mimo našej vytýčenej množiny nevyhovujú.

Teraz ukážeme, že body našej množiny vyhovujú. Bod O a vrcholy trojuholníka triviálne vyhovujú. Ďalej sa zamerajme na zvyšné body ležiace na kružnici ABC. BÚNO nech P leží na kratšom oblúku BC. Je známe, že v prípade rovnostranného trojuholníka bod P leží na ňom práve vtedy ak $|AP| = |BP| + |CP|$ z Ptoleimaovej nerovnosti. Teraz si všimnime, že $\measuredangle BPC = 120^\circ$. Teda dĺžku trojuholníka vieme vyjadriť jednoznačne cez kosínusovú vetu pomocou BP a CP, čím sme hotoví. *(Adam „Džavo“ Džavoronok)*