Řešení 1. série

Úloha N1. *Danil si chce v zoo koupit tuleně, který stojí* $100!$ *korun. V kapse našel bankovky v hodnotách* $1!, 2!, \ldots, 100!$ *korun. Bankovky stejné hodnoty jsou navzájem nerozlišitelné a Danil jich má od každé hodnoty nekonečně mnoho. Dokažte, že umí zaplatit alespoň* $100!$ *různými způsoby. (Při placení nezáleží na pořadí bankovek.)*

Řešení. Ukažme si dva způsoby, jak úlohu vyřešit.

Řešení prvé (matematickou indukcí): Dokažme indukcí: pro přirozené $n \geq 4$ existuje alespoň $n!$ způsobů, jak pomocí bankovek v hodnotách $1!, \ldots, (n-1)!$ zaplatit $n!$. K této formulaci se nabízí dvě otázky: Proč jsme vyloučili bankovku $n!$? Protože přidá pouze jeden způsob zaplacení a jen by komplikovala indukční krok. Proč $n \geq 4$? Protože pro $n = 3$ tvrzení neplatí (ani pokud povolíme bankovku $n!$).

Nejprve základní případ, tedy $n = 4$. Můžeme použít a bankovek $3!$ ($a \in \{0, 1, \ldots, \frac{4!}{3!}\}$), následně b bankovek $2!$ ($b \in \{0, 1, \ldots, \frac{4!-a\cdot 3!}{2!}\}$) a konečně musíme doplnit $c = \frac{4!-a\cdot 3!-b\cdot 2!}{1!}$ bankovek $1!$. Způsob, kterým jsme zaplatili, je tak jednoznačně určen hodnotami a, b. To dává celkem

$$\sum_{a=0}^{4} \sum_{b=0}^{12-3a} 1 = \sum_{a=0}^{4} (13 - 3a) = 5 \cdot 13 - 3 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + 4) = 65 - 30 = 35 \geq 24 = 4!$$

způsobů jak zaplatit, takže pro $n = 4$ tvrzení platí.

Nyní indukční krok. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k$, a ukažme, že potom platí i pro $n = k + 1$. Platí $(k + 1)! = k! \cdot (k + 1)$ a oproti $n = k + 1$ můžeme použít bankovku $k!$. Tu můžeme použít a-krát ($a \in \{0, \ldots, k\}$), načež zbude zaplatit ještě nějaký nenulový násobek částky $k!$. K tomu stačí vybrat jeden ze způsobů, jak zaplatit $k!$ pomocí bankovek $1!, \ldots, (k-1)!$ – těch je z indukčního předpokladu alespoň $k!$ – a použít příslušný počet kopií této hromádky bankovek. Je $k + 1$ způsobů, jak zvolit a, pročež toto vytvoří alespoň $(k + 1) \cdot k! = (k + 1)!$ způsobů, jak zaplatit $(k + 1)!$. Je zřejmé, žádné dva z těchto způsobů zaplacení nejsou stejné, neboť vždy používají buďto rozdílný počet bankovek $k!$, nebo rozdílnou hromádku se součtem $k!$.

Tvrzení je tímto dokázáno. Vzetím $n = 100$ je pak úloha vyřešena (nemusíme ani použít bankovku $100!$).

Řešení druhé (malými bankovkami): Prostě spočítáme všechny možnosti zaplacení pouze pomocí bankovek $1!$, $2!$ a $3!$ – ukáže se, že je to víc než dost. Podobně jako v případě $n = 4$ v prvém řešení můžeme použít a bankovek $3!$ ($a \in \{0, \ldots, \frac{100!}{3!}\}$), následně b bankovek $2!$ ($b \in \{0, \ldots, \frac{100!-a\cdot 3!}{2!}\}$) a zbytek doplnit bankovkami $1!$. To dá celkem

$$\sum_{a=0}^{\frac{100!}{3!}} \sum_{b=0}^{\frac{100!-a\cdot 3!}{2!}} 1 > \sum_{a=1}^{\frac{100!}{3!}} \sum_{b=1}^{\frac{100!-a\cdot 3!}{2!}} 1 = \sum_{a=1}^{\frac{100!}{3!}} \frac{100! - a \cdot 3!}{2!} = \frac{100! \cdot 100!}{3!2!} - \frac{3!}{2!} \cdot \frac{\frac{100!}{3!}\left(\frac{100!}{3!} + 1\right)}{2} >$$

$$> (100!)^2 \cdot \left(\frac{1}{3!2!} - \frac{3!}{2!} \cdot \frac{1}{2 \cdot (3!)^2}\right) = (100!)^2 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{24}\right) = \frac{(100!)^2}{24} > 100!$$

způsobů, jak zaplatit. Využíváme vztahu $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ a zcela zřejmého $100! > 24$.

Poznámky opravujícího. Většina řešení v principu používala jednu ze dvou myšlenek ukázaných ve vzoráku. Řešení malými bankovkami se navzájem mírně lišila přesným způsobem, jak zaplatit, ale všechna jej úspěšně dotáhla do konce. Naproti tomu všechna správná řešení indukcí postupovala téměř totožně se vzorákem. Někteří řešitelé se pokusili vycházet z případu $n = 1$ (namísto $n = 4$ či něčeho ještě vyššího), což však vygeneruje pouze $\frac{100!}{2}$ způsobů, jak zaplatit.

(Matěj Doležálek)

Úloha G1. *Je dán trojúhelník ABC se středem kružnice opsané O. Nechť D, E, F jsou paty výšek po řadě z vrcholů A, B, C. Průsečík AD a EF označíme X, přímka AO protíná BC v Y. Dále buď M střed strany BC a Z střed úsečky XY. Dokažte, že body A, Z, M leží na jedné přímce.*

Řešení. Ukažme si dva způsoby, jak úlohu vyřešit.

Řešení prvé (trikovým zobrazením): $|\sphericalangle BFC| = |\sphericalangle BEC| = 90°$, takže čtyřúhelník $BCEF$ je tětivový. Tedy trojúhelníky ABC a AEF jsou nepřímo podobné. Uvažujme zobrazení, které je převádí na sebe. Dané dva trojúhelníky sdílejí společný vrchol A a zároveň A, F, B a A, E, C jsou kolineární. Pokud tedy nejprve trojúhelník AEF překlopíme v osové souměrnosti podle osy úhlu BAC, pak už dané dva trojúhelníky budou přímo podobné, navíc se na sebe budou dát převést stejnolehlostí se středem v bodě A. Uvažujme tedy zobrazení, které vznikne složením této osové souměrnosti a stejnolehlosti.

Kam se v tomto zobrazení zobrazí bod H?

AH a AO jsou izogonály, jinak řečeno, platí, že $|\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle CAO|$ $(= 90° - \beta)$. Proto se přímka AH v osové souměrnosti podle osy úhlu BAC zobrazí na přímku AO, tedy i obraz bodu H v daném zobrazení musí ležet na přímce AO.

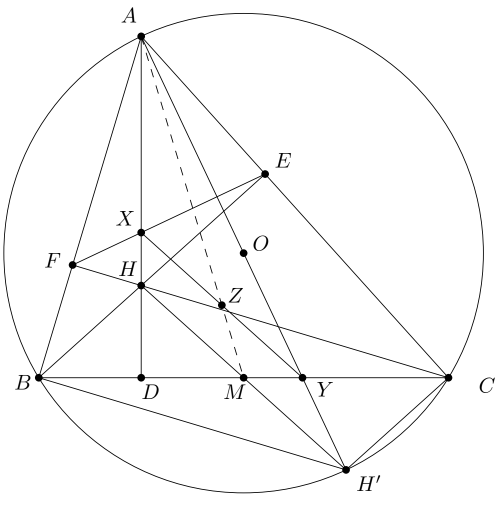
Dále $|\sphericalangle AFH| = |\sphericalangle AEH| = 90°$. Takže čtyřúhelník $AFHE$ je tětivový. Pro bod H', obraz bodu H v daném zobrazení, musí tedy platit, že čtyřúhelník $ABH'C$ je tětivový. A také, že $|\sphericalangle ABH'| = |\sphericalangle ACH'| = 90°$.

Bod H' tak můžeme definovat jako průsečík přímky AO s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC.

Zřejmě platí, že přímky CF a $H'B$ stejně tak jako přímky BE a $H'C$ jsou rovnoběžné. Čtyřúhelník $HBH'C$ je tedy rovnoběžníkem. Jeho úhlopříčky se půlí, takže body H, M, H' musí být kolineární.

Protože námi definované zobrazení zřejmě zachovává poměry, tak $\frac{AX}{AH} = \frac{AY}{AH'}$. Tedy přímky XY a HH' jsou rovnoběžné.

Z toho už plyne, že body A, Z, M leží na přímce. Dá se to například říct tak, že trojúhelníky AXY a AHH' jsou stejnolehlé se středem v bodě A, tedy i středy jejich odpovídajících stran musí ležet s bodem A v přímce.

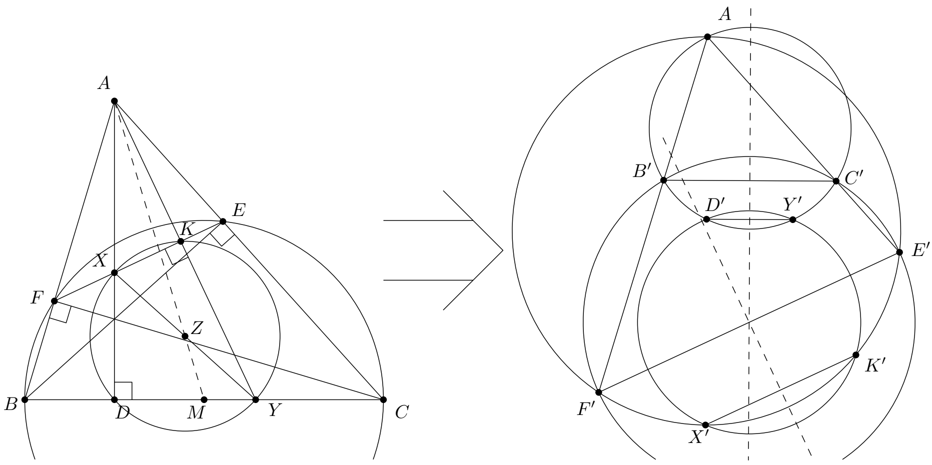


Poznámka: Na první pohled se možná zdá, že využití výše zmíněného zobrazení, které je složením osové souměrnosti a stejnolehlosti, je poněkud náhodné. Řešit se to dá prakticky stejně i bez něj a to s využitím podobnosti. Zadefinované zobrazení ale dává nějak víc náhled na to, co se v úloze opravdu děje a proč to nakonec vyjde.

Řešení druhé (kruhovou inverzí): Víme, že $|\sphericalangle BFC| = |\sphericalangle BEC| = 90^\circ$, takže čtyřúhelník $BCEF$ je tětivový. Z toho také plyne $|\sphericalangle AEF| = \beta$. Označme K průsečík přímek AY a EF. Tak jako v prvním řešení využijeme, že přímky AD a AY jsou izogonály, tedy že $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAY| = 90^\circ - \beta$. Z trojúhelníku AEK tak víme, že $|\sphericalangle AKE| = 180^\circ - |\sphericalangle AEF| - |\sphericalangle CAY| = 180^\circ - \beta - (90^\circ - \beta) = 90^\circ$. Protože také $|\sphericalangle ADY| = 90^\circ$, tak čtyřúhelník $XDYK$ je tětivový. Zároveň si všimněme, že kružnice opsaná čtyřúhelníku $BCEF$ je zároveň Thaletovou kružnicí nad průměrem BC, tedy střed této kružnice je v bodě M. Stejně tak kružnice opsaná čtyřúhelníku $XDYK$ je zároveň Thaletovou kružnicí nad průměrem XY, středem této kružnice je tedy bod Z. Úloha po nás tedy chce, abychom dokázali, že nějaké dva středy kružnic leží společně s bodem A v přímce.

Uvažujme nyní kruhovou inverzi se středem v A. Body B, D, Y a C leží na přímce, na které neleží bod A, obraz této přímky tak bude nějaká kružnice procházející bodem A. To stejné platí pro obraz přímky, která prochází body F, X, K a E. Po kruhové inverzi stále bude platit $|\sphericalangle B'AD'| = |\sphericalangle C'AY'|$. Protože, ale nyní body A, B', D', Y' a C' leží na kružnici, plyne z toho $|B'D'| = |C'Y'|$. Takže čtyřúhelník $B'D'Y'C'$ je rovnoramenným lichoběžníkem, takže osa úsečky $B'C'$ je totožná s osou úsečky $D'Y'$. Obdobně to samé můžeme dokázat o totožnosti os úseček $E'F'$ a $X'K'$.

A nyní přichází velký trik (tak možná jen malý). Podívejme se na obrazy kružnic opsaných čtyřúhelníkům $BCEF$ a $DYKX$. Ty neprocházejí středem inverze, zobrazí se tak na kružnice. A protože osy úseček $B'C'$ resp. $E'F'$ a $D'Y'$ resp. $X'K'$ jsou totožné, tak střed kružnic opsaných $B'C'E'F'$ a $D'Y'K'X'$ bude tentýž bod. Kruhová inverze sice nezobrazuje střed kružnice na střed zinvertované kružnice(!), ale zachovává přímky, které procházejí skrz střed inverze. Takže protože oba středy zinvertovaných kružnic $B'C'E'F'$ a $D'Y'K'X'$ leží s bodem A v přímce, tak to musí platit i pro jejich obrazy. Takže i body A, M a Z jsou kolineární.



Poznámky opravujícího. Polovina došlých řešení se snažila úlohu nějak upočítat. Kamenem úrazu těchto řešení ale často byly nedotažené detaily jako například dělení nulou v nějakém speciálním případě nebo řečení, že to po úpravě výrazu prostě vyjde (což taky vyjde, ale zvlášť u počítacích řešení geometrie je to potřeba pořádně rozepsat), za které jsem strhávala 1-2 body. Objevila se také řešení prvního způsobu vzorového řešení (ač teda bez zavedení daného zobrazení), ojediněle pak řešení kruhovou inverzí a spirální podobností.

(Lenka Kopfová)

Úloha A1. *Pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c dokažte nerovnost*

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)\geq\frac{9}{1+abc}.$$

Řešení. Uvažujme následující nerovnosti:

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geq\frac{3}{1+abc} \tag{1}$$

$$\frac{1}{a(c+1)}+\frac{1}{b(a+1)}+\frac{1}{c(b+1)}\geq\frac{3}{1+abc} \tag{2}$$

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)}\geq\frac{3}{1+abc} \tag{3}$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme nerovnost ze zadání v roznásobeném tvaru.
Z AG nerovnosti zřejmě platí

$$\frac{a+1}{a(b+1)}+\frac{a(b+1)}{a+1}\geq 2.$$

V této nerovnosti můžeme cyklicky zaměnit proměnné a získané 3 nerovnosti sečíst.

$$\frac{a+1}{a(b+1)}+\frac{a(b+1)}{a+1}+\frac{b+1}{b(c+1)}+\frac{b(c+1)}{b+1}+\frac{c+1}{c(a+1)}+\frac{c(a+1)}{c+1}\geq 6$$

$$\left(\frac{a+1}{a(b+1)}+\frac{b(c+1)}{b+1}\right)+\left(\frac{b+1}{b(c+1)}+\frac{c(a+1)}{c+1}\right)+\left(\frac{c+1}{c(a+1)}+\frac{a(b+1)}{a+1}\right)\geq 6$$

$$\frac{1+abc}{a(b+1)}+\frac{1+abc}{b(c+1)}+\frac{1+abc}{c(a+1)}\geq 3$$

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geq\frac{3}{1+abc}$$

Tím jsme dokázali nerovnost (1). Nerovnost (2) dostaneme záměnou proměnných (stačí vyměnit a a c). Nakonec můžeme ze symetrie původní nerovnosti BÚNO zvolit $a\leq b\leq c$, a tedy $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}\geq\frac{1}{c}$ a $\frac{1}{a+1}\geq\frac{1}{b+1}\geq\frac{1}{c+1}$. Z permutační nerovnosti potom platí

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)}\geq\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geq\frac{3}{1+abc}.$$

Tím byla dokázána nerovnost (3) a úloha je vyřešena.

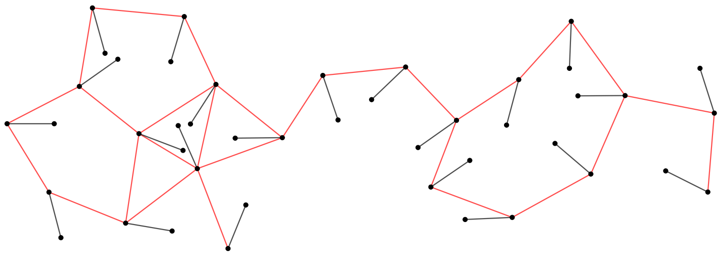
Poznámky opravujícího. Většina řešitelů postupovala stejně jako ve vzoráku, zadanou nerovnost tedy dokazovali jako součet 3 jednodušších nerovností. *(Josef Minařík)*

Úloha C1. *V rovině je několik bodů, přičemž každé dva z nich jsou od sebe vzdálené více než $\sqrt{2}$. Ke každému je za krajní bod připevněna jednotková úsečka, která se kolem něj může volně otáčet.*

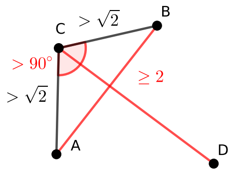
Natočení úseček nazýváme povolené, pokud se žádné dvě z nich neprotínají; v opačném případě jej nazveme zakázané. Ukažte, že každá dvě povolená natočení na sebe lze převést bez toho, aby nastalo nějaké zakázané.

Řešení.

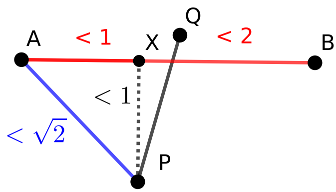
Spojíme červenou hranou všechny dvojice bodů, jejichž vzdálenost je menší než 2.



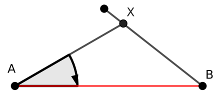
Tvrzení 1: Žádné 2 červené úsečky se neprotínají, neboli takto nakreslený graf je rovinný.
Důkaz: Pro spor, nechť se červené úsečky AB a CD protínají. V čtyřúhelníku $ACBD$ existuje úhel, který má velikost alespoň $90°$, BÚNO je to úhel $\sphericalangle ACB$. Pak z kosinové věty $|AB|^2 > |AC|^2 + |CB|^2$. Ze zadání $|AC| > \sqrt{2} < |CB|$, neboli $|AB|^2 \geq 2 + 2 = 4$. Ale aby úsečka AB byla červená, tak $|AB| < 2$, což je spor.



Tvrzení 2: Jednotková úsečka protíná pouze červené hrany, které vedou z vrchou, ke kterému je připevněná.
Důkaz: Pro spor mějme PQ jednotkovou úsečku připevněnou v bodě P, která protíná červenou úsečku AB. Označme X patu kolmice P na AB. Bod X musí ležet uvnitř AB, protože v kruhu se středem P a poloměrem 1 nesmí být obsažen žádný bod. BÚNO $|XA| \leq |XB|$. Pak máme, že $|XP| \leq |XQ| = 1$ a $|XA| \leq \frac{|AB|}{2} < 1$, takže $|PA|^2 \leq |XA|^2 + |XP|^2$, po dosazení $|PA|^2 < 2$, což je spor se zadáním.



Definujeme natočení úseček jako *hezké*, pokud každá úsečka směřuje ve směru nějaké červené hrany. Na jedné červené hraně můžeme mít i 2 úsečky, protože ale nemůžou být přímo přes sebe, tak nám bude stačit, aby byly o malé ϵ od jejich příslušné hrany.



Tvrzení 3: Každá počáteční situace se dá natočit na nějakou *hezkou.*
Důkaz: Vybereme jakoukoli úsečku, která není na červené hraně. A začneme ji jakýmkoli směrem točit, než vrazí do nějaké jiné úsečky, nebo se natočí na červenou hranu. Pokud vrazila, tak si označíme tyhle 2 úsečky jako a a b. Tyto 2 úsečky spolu zinteragovaly, neboli existuje červená hrana $\check{c}$, která propojuje jejich vrcholy. Označme X bod dotyku a a b. Dále A, resp B vrcholy úsečky a, resp. b. Úhel $|\sphericalangle AXB|$ musí být tupý, protože jinak $|AB|^2 < |AX|^2 + |BX|^2$, neboli $|AB| < \sqrt{2}$. Vybereme tu úsečku, která svírá s $\check{c}$ menší úhel. Uvnitř trojúhelníka AXB nemůže být žádná další usečka, protože by musela křížit nějakou ze stran trojúhelníka a strany AX a BX nemůže křížit ze zadání a stranu AB pomocí Tvrzení 2. Protože je tedy $|\sphericalangle AXB|$ tupý a v trojúhelníku ABX není žádná úsečka, tak této úsečce nic nebrání se otočit na $\check{c}$.

Tvrzení 4: Každá *hezká* konfigurace se dá převést na každou jinou.
Důkaz: Hezká konfigurace je jednoznačně dána následujícími parametry:

1. Pro každý vrchol na kterou červenou hranu je jeho úsečka natočená.
2. Pokud jsou na nějaké červené úsečce 2 hrany, tak v jakém jsou pořadí.

Vytvoříme si 2 operace, pomocí kterých budeme umět tyto 2 parametry měnit:

1. **Mějme úsečky a a b obě na stejné červené hraně. Pak jim umíme prohodit pořadí.** BÚNO se a může točit ve směru hodinových ručiček. Pak můžeme natočit a po směru hodinových ručiček na nejbližší sousední červenou hranu. Pak b proti směru hodinových ručiček na nejbližší sousední hranu. Následně vrátíme a a potom b. Z tvrzení 2 víme, že při takovémto otáčení úsečkám nic nepřekáží.
2. **Pokud se úsečce a na její červené hraně nepřekáží žádná hrana v otáčení ve směru hodinových ručiček, můžeme ji otočit na další červenou hranu ve směru hodinových ručiček.** Jednoduše plyne z tvrzení 2.

Nejdříve pomocí operace 2 naposouváme úsečky na správné červené hrany. Pokud bude nějaké hrana překážet v cestě, tak využijeme operaci 1. A následně pomocí operace 1 opravíme pořadí na všech červených hranách.

Pokud nyní chceme převést konfiguraci α na konfiguraci β, tak si nejdříve rozmyslíme jak převést α na *hezkou* α^H a β na *hezkou* β^H Tyto operace umíme provést i v opačném směru. Takže převedeme $\alpha \to \alpha^H \to \beta^H \to \beta$. □

Poznámky opravujícího. K této úloze přišlo jediné řešení, kterému chyběly některé formality. I přes to, že je vzorové řešení dlouhé, tak je rozložené na tvrzení, jejichž znění ukazují hlavní myšlenkové kroky v řešení. Důkaz každého z nich je přímočarý. Za úlohu by se tedy dalo získat dost částečných bodů a je škoda, že takové příležitosti skoro nikdo nevyužil.

(Radek Olšák)