

Zadanie 6. série

Termín odoslania: 23. januára 2023

Adresa submitka: www.iksko.org/submit

Úloha A6. Uvažujme pre reálne $r \geq 2$ rovnicu $x^2 = r[x]$ v kladnej reálnej premennej x . Dokážte, že pre každé $r \geq 2$ má táto rovnica buď práve dve, alebo práve tri riešenia $x \in \mathbb{R}^+$.

Úloha N6. Žirafa Anna priniesla Michalovi prvočíslo $p > 2$ a poprosila ho, aby našiel permutáciu $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ čísel $1, 2, \dots, p-1$, ktorá bude spĺňať

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{p-3}x_{p-2} + x_{p-2}x_{p-1} \equiv 2 \pmod{p}.$$

„Jasne, idem tu permutáciu hneď zrátať!“, zvolal nadšene Michal. Žirafa odvetila „Nič nerátaj, určite existuje nejaká pekná...“ Dokážte, že pre každé $p > 2$ takáto permutácia existuje.

Úloha G6. Majme tetivový konvexný šesťuholník $ABCDEF$. Označme K, L postupne priesečníky AB s DC a AF s DE . Ďalej nech je P priesečník BE s CF . Označme O_1, O_2 postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom BCK a EFL . Dokážte, že body O_1, P a O_2 ležia na priamke.

Úloha C6. Majme zadané dve nesúdeliteľné prirodzené čísla p, q . Na číselnej osi stojí klokan. A pretože ho baví skákať, tak si nejako skáče doľava a doprava. Vždy, keď skáče doprava, poskočí o vzdialenosť p , a vždy, keď doľava, poskočí o vzdialenosť q . Po nejakej dobe doskáče tam, kde začal. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $d < p + q$ existujú čísla, na ktorých klokan bol a sú vzdialené presne d .