Zadanie 2. série

Termín odoslania: 27. mája. 2013

Adresa pre odoslania: *KMS – iKS*
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovenská republika

Úloha G2. Na stranách AB a BC konvexného štvoruholníka $ABCD$ sú postupne dané body M a N tak, že CM a AN delia jeho obsah na polovice. Dokážte, že MN rozpoľuje uhlopriečku BD.

Úloha N2. Mocninou (s veľkým M) nazveme také prirodzené číslo, čo sa dá zapísať v tvare a^n, kde a, n sú prirodzené čísla, $n > 1$.

a) Dokážte, že existuje taká množina 2013 prirodzených čísel, že súčet prvkov ľubovoľnej jej neprázdnej podmnožiny nie je Mocnina.

b) Dokážte, že existuje taká množina 2013 prirodzených čísel, že súčet prvkov ľubovoľnej jej neprázdnej podmnožiny je Mocnina.

Úloha C2. V kruhu (vrátane hranice) s polomerom 1 máme n bodov. Dokážte, že aspoň $\frac{n^2}{6} - \frac{n}{2}$ dvojíc týchto bodov je vzdialených najviac $\sqrt{2}$.

Úloha A2. Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ spĺňa

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_{k+1} = -a_k + \frac{1}{2 - a_k}$$

pre $k \geq 1$. Označme aritmetický priemer prvých n čísel postupnosti A_n. Dokážte, že

$$\left(\frac{1}{2A_n} - 1\right)^n \leq A_n^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_i} - 1\right).$$