Řešení 3. série

Úloha G3. *Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník a P je bod takový, že $PA \perp AB$ a $PC \perp CB$. Body D a E leží na stranách AB a BC tak, že $|AD| = |AP|$ a $|CE| = |CP|$. Body X a Y leží na přímkách AB a BC tak, že $XE \perp BC$ a $YD \perp AB$. Ukažte, že $|PX| = |PY|$.*

Řešení. Budeme uvažovat konfiguraci bodů jako na obrázku. Důležité je pro nás pořadí bodů X, D na přímce AB a E, Y na přímce BC. Ostatní konfigurace se liší pouze přejmenováním bodů, které nebudu v řešení komentovat, nebo ještě prohozením pořadí bodů D, X. Konfigurace s prohozením Y, E nemůže nastat, to bychom z Pythagorovy věty dostali

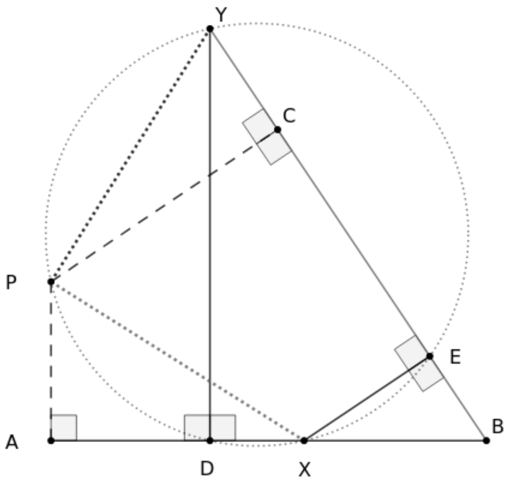
$$|BE|^2 + |EX|^2 = |BX|^2,$$

$$|BD|^2 + |DY|^2 = |BY|^2,$$

ale předpokládali jsme, že

$$|BD| > |BX|, |BE| > |BY|,$$

z čehož už je zřejmý spor.



Nejprve ukážeme, že body Y, D, E, X leží na jedné kružnici. Přímka YD je kolmá na AB, ale X leží na AB, tak platí i $YD \perp AB$, ale X a D leží na AB, tak $YD \perp DX$. Stejně tak platí $XE \perp EY$.

Teď ukážeme, že i bod P leží na této kružnici. $\triangle PAD$ je rovnoramenný pravoúhlý, takže $|\angle PDA| = 45°$ a $|\angle PDX| = 135°$, obdobně $|\angle PEX| = 45°$, takže body P, X, E, D leží na kružnici, takže body P, D, C, E, Y leží na kružnici. Při druhé konfiguraci by $|\angle PDX| = 45°$ a D, E by ležely ve stejné polorovině určené PX, takže pořád P, D, X, E leží na kružnici.

Z tohoto už snadno plyne, že $|\angle PDY| = 45° = |\angle PEX|$, takže $|PY| = |PX|$ a jsme hotovi.

Poznámky opravujícího. Řešitelé často nediskutovali různé konfigurace, ale řešení je pro všechny konfigurace je řešení prakticky identické, proto jsem za to body nestrhával. Stejně tak jsem nestrhával při drobných chybách vzniklých zohledněním více konfigurací. *(Vašek Voráček)*

Úloha C3. *Pavel našel 2018 reálných čísel a_1, a_2, ..., a_{2018} a strčil si je do pytlíčku. Nyní kdykoliv jsou v pytlíčku čísla x a y, umí Pavel vyrobit čísla $x+y$, $-x$ a x^{2018} a přidat je do pytlíčku. Ukažte, že existuje nenulové reálné číslo K, nezávislé na a_1, a_2, ..., a_n, takové, že Pavel umí v konečně mnoha krocích vyrobit číslo $Ka_1a_2\cdots a_{2018}$ nezávisle na hodnotě čísel a_1, a_2, ..., a_{2018}.*

Řešení. Označme množinu A jako množinu 2018 čísel ze zadání (i kdyby pro nějaká i a j platilo $a_i = a_j$, budeme je považovat za různé prvky). Pro vyřešení úlohy stačí dokázat rovnost

$$\sum_{X\subseteq A}(-1)^{|X|}\cdot\left(\sum_{x\in X}x\right)^{2018} = 2018!a_1a_2\cdots a_{2018}.$$

Podívejme se na levou stranu rovnosti. Tento výraz lze očividně opravdu vytvořit pouze pomocí sčítání, odečítání (tj. přičítání opačného čísla) a mocnění na 2018, což máme ze zadání povoleno. Uvedená suma kombinatoricky znamená, že se podíváme na každou podmnožinu množiny A a prvky této množiny sečteme, tento součet umocníme na 2018 a následně ho buď přičteme k výslednému výrazu, nebo ho od něj odečteme (podle toho jestli má daná podmnožina sudý nebo lichý počet členů). Každý takovouto umocněnou závorku si lze představit jako výraz $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018})^{2018}$, kde akorát chybějící členy nahradíme nulami. Z toho hned plynou dvě věci. Za prvé na levé straně rovnosti budou po umocnění závorek pouze členy tvaru $a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_{2018}^{\alpha 2018}$, kde α_i jsou nezáporná celá čísla se součtem 2018, a za druhé pokud nějaký konkrétní člen dostaneme při umocnění více různých závorek, tak před ním bude vždy stejný koeficient (protože pokud už vznikne, tak už nezávisí na tom, které členy uvnitř závorky jsou).[1]

Nyní se podívejme na nějaký konkrétní člen $s = a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_{2018}^{\alpha 2018}$ a označme si nenulový koeficient, se kterým ho po umocnění závorky $(a_1+a_2+\cdots+a_{2018})^{2018}$ dostaneme, jako q. Ten se dostane do výsledného součtu právě ze všech podmnožin, které obsahují všechna čísla a_i, pro které $\alpha_i \neq 0$. Nechť má s takovýchto čísel právě j, $1 \leq j \leq 2018$. Pak podmnožin délky velikosti k, které ho obsahují je právě $\binom{2018-j}{k-j}$ (kombinační číslo se záporným dolním číslem definujme rovno 0). Pak je člen s na levé straně rovnosti právě celkově s koeficientem

$$q\sum_{k=1}^{2018}(-1)^k\binom{2018-j}{k-j} = q\sum_{k=j}^{2018}(-1)^k\binom{2018-j}{k-j} = q\sum_{i=0}^{2018-j}(-1)^k\binom{2018-j}{i}.$$

Pokud je j rovno 2018, tak už nutně člen roven $a_1a_2\cdots a_{2018}$ a celkový koeficient u něho vyjde přímo nezáporné q, z multinomické věty konkrétně rovno 2018! (kolika způsoby lze při násobení z 2018 závorek postupně vybrat 2018 různých čísel). Pokud ale $j < 2018$, tak ale z binomické věty $q\sum_{i=0}^{2018-j}(-1)^k\binom{2018-j}{i} = q\cdot(1-1)^{2018-j} = 0$. Tedy tento člen na levé straně rovnosti po umocnění a sečtení nebude.

Levá strana rovnosti tedy vyjde rovna přesně $2018!a_1a_2\cdots a_{2018}$, čímž jsme hotovi.

Poznámky opravujícího. *(Martin Raška)*

Úloha A3. *Ukažte, že pro každou n-tici reálných čísel x_1, x_2, ..., x_n platí*

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

[1] Také to triviálně plyne z multinomické věty, což je zobecnění binomické věty.

Řešení. Definujme $s_k = 1 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$ pro všechna celá čísla $0 \le k \le n$. Naše nerovnost má tvar

$$\frac{x_1}{s_1} + \frac{x_2}{s_2} + \cdots + \frac{x_n}{s_n} < \sqrt{n}.$$

Užitím Cauchy-Schwartzovy nerovnosti pro n-tice $(1, 1, \ldots, 1)$ a $\left(\frac{x_1}{s_1}, \frac{x_2}{s_2}, \ldots, \frac{x_n}{s_n}\right)$ dostaneme

$$\left(\frac{x_1}{s_1} + \frac{x_2}{s_2} + \cdots + \frac{x_n}{s_n}\right)^2 \le n\left(\left(\frac{x_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{s_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{s_n}\right)^2\right),$$

tedy stačí ukázat, že

$$\left(\frac{x_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{s_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{s_n}\right)^2 < 1,$$

což nám dá po vynásobení n, použití výše CS nerovnosti a odmocnění naši původní nerovnost.

Jelikož $x_i^2 \ge 0$ pro všechna $i \in 1, 2, \ldots, n$ a $0 < s_0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le s_n$, tak můžeme psát

$$\left(\frac{x_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{s_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{s_n}\right)^2 \le \frac{x_1^2}{s_1 s_0} + \frac{x_2^2}{s_2 s_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{s_n s_{n-1}} =$$

$$= \frac{s_1 - s_0}{s_1 s_0} + \frac{s_2 - s_1}{s_2 s_1} + \cdots + \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \left(\frac{1}{s_0} - \frac{1}{s_1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}\right) = 1 - \frac{1}{s_n} < 1.$$

Tímto je naše původní nerovnost dokázána. *(Pavel Turek)*

Úloha N3. *Přirozená čísla jsou obarvena dvěma barvami. Funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je neklesající, a splňuje, že pokud (ne nutně různá) čísla x, y a z mají stejnou barvu a splňují $x + y = z$, potom platí $f(x) + f(y) = f(z)$. Ukažte, že existuje kladné číslo a takové, že $f(x) \le ax$ pro všechna přirozená x.*

Řešení. BÚNO nechť jsou naše dvě barvy modrá a červená.

Pod označením *úsek* $[x, y]$, kde $x \le y$ jsou přirozená čísla, máme na mysli množinu přirozených čísel ležící neostře mezi x a y. *Délkou* tohoto úseku myslíme číslo $y - x$.

Pokud pro každá dvě přirozená čísla x, y stejné barvy platí $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$, stačí zjevně zvolit a větší než velikost tohoto zlomku pro obě barvy. Takže dále předpokládejme, že existuje dvojice BÚNO červených čísel x a y taková, že $\frac{f(x)}{x} \ne \frac{f(y)}{y}$.

Nechť $m = xy$. Kdyby pro nějaké k byla všechna čísla v úseku $[k, k + m]$ červená, pak platí

$$f(k + m) = f(k + xy) = f(k + x(y - 1)) + f(x) = \cdots = f(k) + yf(x),$$

$$f(k + m) = f(k + xy) = f(k + (x - 1)y) + f(y) = \cdots = f(k) + xf(y),$$

takže $yf(x) = xf(y)$, což je spor. Takže v každém úseku délky m se vyskytuje alespoň jedno modré číslo.

Nyní uvažujme dva případy:

Případ 1. Nechť pro nějaké $k > m$ je úsek $[k, k + m]$ celý modrý. Nyní nechť z je libovolné přirozené číslo větší než k. V úseku $[z - m, z]$ se vyskytuje alespoň jedno modré číslo - největší z nich označme jako b_1. Dále nechť b_2 je modré číslo z úseku $[b_1 + k, b_1 + k + m]$. Platí $b_2 \ge b_1 + k \ge z - m + k > z$. Protože $b_2 - b_1$ leží v úseku $[k, k + m]$, je toto číslo modré a tedy $f(b_2) = f(b_1) + f(b_2 - b_1) \le f(b_1) + f(k + m)$ (kde jsme využili, že f je neklesající). Z toho a ze zadání (f je neklesající) plyne, že $f(z + 1) - f(z) \le f(b_2) - f(b_1) \le f(k + m)$ pro každé $z > k$.

Případ 2. Nechť pro každé $k > m$ obsahuje úsek $[k, k + m]$ čísla obou barev. Buď $R \geq 2m$ takové červené číslo, že $R+1$ je modré. Uvažme libovolné $z > 2m$. Protože $z-m > m$, obsahuje úsek $[z - m, z]$ nějaké červené číslo - označme jako r to nejvyšší takové. Protože $r \geq z - m$, je $r - m \geq z - m > 0$, takže v úseku $[r - m, r]$ se nachází nějaké modré číslo – nechť b označuje nejvyšší takové. Platí $0 < z - b \leq 2m$. Uvědomme si, že $b + 1$ je červené číslo. Nechť $t = b + R + 1 > z$. Pokud je t modré, je $f(t) = f(b) + f(R + 1)$, a tedy $f(z + 1) - f(z) \leq f(t) - f(b) = f(R + 1)$. Pokud je t červené, je $f(t) = f(b + 1) + f(R) \leq f(b + 1) + f(R + 1)$, a tedy $f(z + 1) - f(z) \leq f(t) - f(b + 1) \leq f(R + 1)$. Z toho dostáváme, že pro každé $z > 2m$ je $f(z + 1) - f(z) \leq f(R + 1)$.

V obou případech jsme tedy dostali, že pro nějaká přirozená n a D platí, že pro každé $z \geq n$ je $f(z + 1) - f(z) \leq D$. Z toho ale jednoduchou indukcí dokážeme, že pro každé z je $f(z) \leq (D + f(n))z$. Pro $z \leq n$ to plyne přímo z $f(z) \leq f(n) < D + f(n) \leq (D + f(n))z$. Nyní, pokud tvrzení platí pro $z \geq n$, pak $f(z+1) \leq D+f(z) < (D+f(n))+(D+f(n))z = (D+f(n))(z+1)$, a tedy jsme z indukce hotovi.

(Rado Švarc)