Řešení 6. série

Úloha A6. Patrik vymyslel funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a shledal, že pro všechna reálná čísla x, y splňuje

$$f(f(x) + x + y^2) = 2x + f(y)^2.$$

Najděte všechny možnosti, jaká mohla být Patrikova funkce.

Řešení. Nechť $P(a, b)$ značí dosazení a za x a b za y.

1. krok: $f(0) = 0$

Zafixujeme-li y, pak pravá strana je nekonstatní lineární funkce podle x a levá strana je hodnota v oboru hodnot, a proto f je surjektivní funkce. Tedy existuje takové reálné číslo a, že $f(a) = 0$.

$P(a, 0) : f(f(a) + a) = 2a + f(0)^2 \Rightarrow f(0)^2 + 2a = 0$, číslo a je tedy jediný kořen funkce f.
$P(0, \mp a) : f(-a)^2 = f(f(0) + a^2) = f(a)^2$

Díky jednoznačnosti kořenu musí platit, že $a = -a$ neboli $a = 0$. Nyní dosazením nuly do x a y můžeme získat důležité vztahy:

$$f(y^2) = f(y)^2$$
$$f(f(x) + x) = 2x.$$

Z druhého vztahu plyne, že hodnota funkce v kladném bodě je kladná a pomocí prvního vztahu můžeme původní rovnici přepsat na $f(f(x)+x+y) = 2x+f(y)$, ale do y smíme dosadit pouze nezáporná čísla.

2. krok: $f(x) = -f(-x)$

Ze vztahu $f(y^2) = f(y)^2$ plyne, že $f(y) = \pm f(-y)$. Pro spor předpokládejme, že existuje takové nenulové t, že $f(t) = f(-t)$ (BÚNO $t > 0$):

$P(-t, 2t) : -2t + f(2t) = f(f(-t) - t + 2t) = f(f(t) + t) = 2t \Rightarrow f(2t) = 4t$
$P(-2t, 2t) : f(f(-2t) - 2t + 2t) = -4t + f(2t) \Rightarrow f(f(-2t)) = 0 \Rightarrow t = 0$,

což je spor.

3. krok: $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Pro $x \geq 0$ dosadíme:

$P(-x, x) : f(f(-x) - x + x) = -2x + f(x) \Rightarrow f(f(x)) = 2x - f(x)$
$P(f(x), 0) : f(f(f(x)) + f(x)) = 2f(x) \Rightarrow 2f(x) = f(2x - f(x) + f(x)) = f(2x)$
$P(f(x), y) : f(2x + y) = 2f(x) + f(y) \Rightarrow f(2x + y) = f(2x) + f(y)$,

což je známá Cauchyho funkcionální rovnice, která má v oboru racionálních čísel řešení $f(x) = cx$. K rozšíření na celý obor reálných čísel potřebujeme u funkce dokázat nějakou vlastnost navíc, např. monotonie. Pokud $x > y$, pak $f(x) = f(y + x - y) = f(y) + f(x - y) > f(y)$. Funkce je rostoucí a díky $f(x) = -f(-x)$ jsou $f(x) = cx$ jediná možná řešení. Zkouškou snadno ověříme, že vyhovuje pouze $f(x) = x$.

Poznámky opravujícího. Jedná se o klasickou olympiádní funkcionální rovnici, která vyžadovala jednak zkušenost (surjektitiva funkce, Cauchyho rovnice), jednak triková dosazení. I když podle mě nebyla úloha jednoduchá, jsem rád, že se sešlo hodně řešení a většina byla správná. Zhruba půlka z nich postupovala jako ve vzorovém řešení.

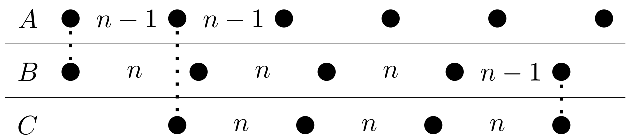
(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha C6. $2n+1$ hráčů ($n \geq 1$) hraje turnaj v ping-pongu. Přitom má hrát každý s každým právě jednou a všechny zápasy se odehrají postupně na jednom stole. Rozhodli se hrát v takovém pořadí, aby mezi každými dvěma zápasy jednoho hráče bylo alespoň $n-1$ jiných zápasů. Dokažte, že jeden z hráčů, který hraje první zápas ze všech musí nutně hrát i poslední zápas ze všech.

Řešení.

Zadání říká, že hráč musí po každé hře čekat alespoň $n-1$ zápasů. Pro začátek dokážeme, že tato pauza naopak nemůže nikdy trvat déle než n zápasů. Sporem – předpokládejme, že některý hráč $n+1$ po sobě jdoucích zápasů nehrál. V prvních n zápasech (z těchto $n+1$) se hráči nemohou opakovat, tedy hrálo tam všech $2n$ zbylých hráčů. V následujícím zápase mohou hrát pouze hráčí z prvního z těch $n+1$ zápasů, ale nesmí hrát podruhé spolu – spor.

Nyní uvažme hráče, kteří spolu hráli jako první – jeden pak má pauzu dlouhou $n-1$ zápasů (označme ho A) a druhý pauzu n zápasů (označme ho B). K vyřešení úlohy stačí dokázat, že každá pauza hráče B trvá n zápasů – hráč B tak bude mezi svými zápasy čekat dohromady $n \cdot (2n-1) = \binom{2n}{2}$ zápasů, což je celkový počet zápasů bez hráče B, a tak se po posledním zápase hráče B už další zápas neodehraje. Dokážeme to sporem – označme C hráče, který hrál s B těsně po jeho první pauze dlouhé $n-1$.



Hráč C s B nemohl hrát před tím, proto před tím C čekal n zápasů, před tím ze stejného důvodu opět, atd., až dospějeme k tomu, že hráč C hrál s hráčem A v druhém zápase hráče A. Jelikož po tomto zápase má hráč C pauzu dlouhou n, hráč A má pak pauzu dlouhou $n-1$.

Podívejme se nyní pouze na zápasy, ve kterých hraje A nebo C. Napřed hraje A, pak A s C, pak opět A. Hráč C nemůže hrát dvakrát po sobě bez toho, aby mezi tím hrál hráč A. Z toho plyne, že hráč A bude mít za sebou od té doby stále alespoň o jeden odehraný zápas víc než C. Na konci ale by měli mít odehraných zápasů stejně – spor.

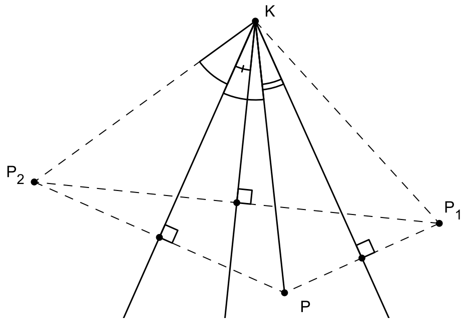
(Martin „Vodka“ Vodička)

Úloha G6. Je dán úhel o velikosti α s hlavním vrcholem A sevřený mezi polopřímkami u_1, u_2 vychazejících z A. Uvnitř úhlu u_1u_2 je dán bod B neležící na jeho ose a dále je dána velikost úhlu β ($\alpha < \beta < 180°$) Uvažme všechny možné dvojice bodů X, Y takové, že $X \in u_1$, $Y \in u_2$, A leží mimo úhel XBY a $|\sphericalangle XBY| = \beta$. Pak body A, B mají tu vlastnost, že vidí úsečku XY pod stále stejným úhlem. Dokažte, že existuje třetí bod s touto vlastností.

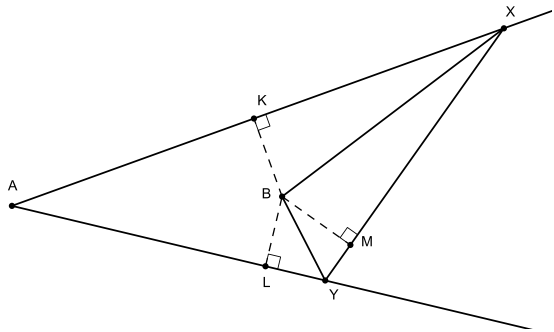
Řešení. Budeme postupovat volně podle *Zhen Ning „Davida“ Liu.*

Dokážeme, že třetím bodem s kýženou vlastností je kamarád [1] bodu B v každém z trojúhelníků AXY. Tvrdíme tedy, že pro všechny úsečky XY ze zadání je kamarádem bodu B v AXY stejný bod. Jednoduché tvrzení říká, že kamaráda bodu P v trojúhelníku KLM dostaneme jako opsiště trojúhelníku, jehož vrcholy vzniknou překlopením bodu P přes strany KLM. Toto tvrzení lze najít ve sborníku zmíněném v poznámce, my si ho nyní krátce dokážeme. Vezměme konvexní úhel s vrcholem K a uvnitř něj bod P. Z obrázku vidíme, že osa P_1P_2 svírá s jedním ramenem stejný úhel jako KP s druhým ramenem, protože každý ze zmíněných úhlů spolu s jedním proužkem vyznačeným úhlem dává úhel u vrcholu K, to si rozmyslete. Když se vrátíme do trojúhelníku KLM, dostáváme, že průsečík os stran trojúhelníka z osových obrazů bodu P neboli jeho opsiště je průsečíkem isogonál s přímkami KP, LP a MP, tedy kamarád bodu P.

[1] neboli *isogonal conjugate*, viz první sborník iKS



Zpět k původní úloze: chceme dokázat, že kružnice opsaná osovým obrazům bodu B se pro různé polohy XY nemění. Obrazy přes přímky u_1 a u_2 jsou pevné, stačilo by tedy, aby se neměnil příslušný obvodový úhel. Přistejnolehlením s koeficientem $\frac{1}{2}$ k B dostaneme ekvivalentní tvrzení – dokázat, že $\sphericalangle KML$, kde K, L, M, jsou paty kolmic z B na u_1, u_2 a XY (viz obr. 2), je pro všechny polohy XY konstantní. Paty kolmic nám vyrobily tětivové čtyřúhelníky, takže platí $\sphericalangle KML = \sphericalangle KMB + \sphericalangle BML = \sphericalangle KXB + \sphericalangle BYL = 360^\circ - \alpha - (360^\circ - \beta)$, tedy číslo nezávisející na X, Y. Pokud body K a X leží na u_1 v opačném pořadí, změní se předchozí rovnosti na $\sphericalangle KML = \sphericalangle KMB + \sphericalangle BML = 180^\circ - \sphericalangle KXB + \sphericalangle BYL = \sphericalangle AXB + \sphericalangle BYL = 360^\circ - \alpha - (360^\circ - \beta)$, analogicky pro prohození bodů Y a L.



Jelikož B neleží na ose $\sphericalangle XAY$, nalezený bod (označme jej D) jakožto kamarád bodu B v AXY nesplyne ani s jedním z bodů A, B. Zbývá ověřit, že D vidí úsečky XY pod neměnným úhlem. Z definice kamaráda jednoduše dopočítáme, že příslušný úhel je roven $180^\circ - \beta + \alpha$, což nezávisí na poloze XY.

Náznak jiného řešení. Označíme v_1 polopřímku z bodu B rovnoběžnou s u_1 a bod C na u_2 takový, že polopřímky v_1 a BC svírají úhel β. Našli jsme vlastně „limitní“ polohu bodu Y, když X utíká do nekonečna. Analogicky definujeme bod E na u_1. Hledaným třetím bodem je pak takový bod D, že $BCDE$ je rovnoběžník, což lze ne zcela bezpracně ale přímočaře ověřit.

Poznámky opravujícího. Na úloze bylo nejobtížnější nalezení onoho třetího bodu, k tomu mohla pomoci třeba Geogebra, ale ani s ní to nebylo úplně snadné. Potom už jste ale většinou nezaváhali, šest ze sedmi řešení byla až na nějaké maličkosti v pořádku. Řešení byla různorodá, pouze druhé zmíněné se s mírnou obměnou vyskytlo dvakrát.

(David Hruška)

Úloha N6. Polynom p s celočíselnými koeficienty $n \geq 1$ proměnných má stupeň[2] ostře menší než n. Uvažme všechny uspořádané n-tice celých čísel $x_1, \ldots, x_n$ takové, že

$$p(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{11} \text{ a pro všechna } x_i \text{ platí } 1 \leq x_i \leq 11.$$

Dokažte, že počet všech takových n-tic je dělitelný jedenácti.

Řešení.

Napřed dokážeme dvě pomocná tvrzení

Lemma 1

Pro $k = 0, \ldots, 9$ platí

$$\sum_{x=1}^{11} x^k \equiv 0 \pmod{11}.$$

Důkaz: Stačí ukázat identitu pro jinou sadu polynomů s koeficienty nad tělesem $\mathbb{Z}_{11}$, které mají stupně $k = 0, 1, \ldots, 9$. Použijeme polynomy $\binom{x}{k}$. Totiž

$$\sum_{x=1}^{11} \binom{x}{k} \equiv \sum_{x=0}^{10} \binom{x}{k} = \binom{11}{k+1} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Alternativní důkaz lemmatu 1: Pro $k = 0$ lemma zjevně platí, předpokládejme $k \geq 1$. Číslo 2 je primitivní prvek modulo 11, proto

$$\sum_{x=1}^{11} x^k \equiv \sum_{x=0}^{9} (2^x)^k = \sum_{x=0}^{9} (2^k)^x = \frac{2^{k^{10}} - 1}{2^k - 1} \equiv 0 \pmod{11}$$

Lemma 2

Pro polynom q n proměnných stupně ostře menšího než $10n$ je součet 11^n hodnot

$$\sum_{x_1, \ldots, x_n = 1}^{11} q(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Důkaz: Stačí ukázat identitu pro jednočlenné polynomy q. Tedy nechť

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}.$$

[2] Stupeň polynomu p více proměnných je roven nejvyššímu součtu exponentů u některého členu polynomu. Tedy například polynom $p(x, y) = x^3y + y^2$ má stupeň 4.

Stupěň q je menší než $10n$, proto některé $e_i < 10$. Bez újmy na obecnosti $e_1 < 10$. Pak

$$\sum_{x_1,\ldots,x_n=1}^{11} q(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{x_2,\ldots,x_n=1}^{11} x_2^{e_2}\cdots x_n^{e_n} \sum_{x_1=1}^{11} x_1^{e_1} \equiv$$

$$\equiv \sum_{x_2,\ldots,x_n=1}^{11} x_2^{e_2}\cdots x_n^{e_n}\cdot 0 = 0 \pmod{11}.$$

Řešení úlohy

Použijeme Lemma 2 na polynom $q = p^{10}$. Jelikož je stupeň p ostře menší než n, bude stupeň q ostře menší než $10n$. Hodnoty q jsou z malé Fermatovy věty modulo 11 pouze nuly a jedničky, přičemž jedničky jsou přesně tam, kde byl modulo 11 polynom p nenulový. Lemma tak dává, že počet nenulových hodnost polynomu p je dělitelných 11. To dává kýžený výsledek vzhledem k tomu, že celkový počet hodnot, které sledujeme je dělitelný 11 (konkrétně 11^n).

Poznámky opravujícího. Klíčový trik spočíval v převedení počítání na sčítání – Lemma 1 by v případě potřeby bylo možné dokázat i rozebráním 11 případů. Napovědět mohl případ, kdy se místo jedenáctky uvažovalo prvočíslo 2. V tomto případě se dá navíc vypozorovat, že modulo 2 mohou polynomy vypada zcela jakkoli (až na podmínku, že mají sudý počet jedniček), takže se nedá spolehnout na jednoduchost / symetrii pozorovanou pro malá n.

Na tento trik naneštěstí žádný řešitel nepřišel. Plným počtem bodů ohodnocené řešení si správně povšimlo, že jsme vám ve skutečnosti zadali k dokázání Chevalley-Warningovu větu (přesněji její speciální případ). Obecné znění této věty namísto tělesa $\mathbb{Z}_{11}$ hovoří o obecném konečném tělese (ani ne nutně $\mathbb{Z}_p$) a namísto o jednom polynomu hovoří o soustavě polynomiálních rovnic takových, že součet stupňů rovnic je menší než n.

(Mirek Olšák)