Zadanie 4. série

Termín odoslania: 4.11.2024
Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`
Email na otázky: `info@iksko.org`

Úloha A4. Konečná množina $\mathcal{S}$ kladných celých čísel sa nazýva *žirafová*, ak $\mathcal{S}$ obsahuje celé číslo $|\mathcal{S}|$, kde $|\mathcal{S}|$ označuje počet rôznych prvkov v $\mathcal{S}$. Majme funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takú že pre ľubovoľnú *žirafovú* množinu $\mathcal{S}$ platí, že množina $f(\mathcal{S})$ je tiež *žirafová*, kde $f(\mathcal{S}) := \{f(a) : a \in \mathcal{S}\}$. Nájdite všetky možné hodnoty $f(2024)$.

Úloha C4. Šošo má $N \geq 2$ nádob na sušienky, ktoré sú na začiatku prázdne. Každý deň si vyberie dve rôzne nádoby a do každej vloží jednu sušienku. Následne každý večer Džavo zoberie nádobu s najväčším počtom sušienok a všetky ich zje. Ak tento proces pokračuje donekonečna, aký je maximálny možný počet sušienok, ktorý môže Džavo za jeden večer zjesť?

Úloha G4. V trojuholníku ABC označme O stred jeho opísanej kružnice a I stred kružnice jemu vpísanej. Nech os vonkajšieho uhla pri vrchole A pretína priamku BC v bode D. Nech I_A je stred pripísanej kružnice trojuholníka ABC oproti vrcholu A. Nech bod K leží na priamke AI tak, že $|AK| = 2|AI| < |IK|$. Dokážte, že ak je úsečka DF priemerom kružnice opísanej trojuholníku DKI_A, tak potom platí $|OF| = 3|OI|$.

Úloha N4. Nech $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi, ktorý má aspoň jeden racionálny koreň. Nech n je kladné celé číslo.

Miško a Zdeněk hrajú hru. Najprv Miško napíše n celých čísel (nie nutne rôznych) na n rôznych miest na tabuli. Potom môže Zdeněk urobiť nasledovnú operáciu: vyberie si pozíciu, na ktorej je napísané celé číslo a, potom si vyberie inú pozíciu, na ktorej je napísané celé číslo b, potom na prvej pozícii vymaže a a na jeho miesto napíše $a + P(b)$. Po ľubovoľnom nezápornom počte vykonaných operácii sa Zdeněk môže rozhodnúť ukončiť hru. Keď Zdeněk hru ukončí, jeho skóre sa rovná počtu výskytu najčastejšieho prvku z pomedzi čísel na tabuli.

Nájdite v závislosti od $P(x)$ a n maximálne skóre (bez ohľadu na Miškovu voľbu počiatočných n čísel), ktoré môže Zdeněk dosiahnuť.