Řešení 1. série

Úloha C1. *V chaloupce žije n trpaslíků. Jednoho dne si každý trpaslík vzal svůj oblíbený hrneček a postavil ho na okraj kulatého stolu. Když bylo dokola na stole vyskládáno n hrnečků, postavil se každý trpaslík k nějakému z nich, každý k jinému, všichni si najednou připili z hrnečku před nimi a posunuli se po směru hodinových ručiček k následujícímu. Toto opakovali, dokud se nevrátili k hrnečku, ke kterému se postavili na začátku. Určete, pro která n mohli trpaslíci rozestavit hrnečky a následně se k nim postavit tak, aby při každém přípitku pil alespoň jeden trpaslík ze svého oblíbeného hrnečku.*

Řešení. Požadované rozestavení existuje pouze pro lichá n.

Ukážeme, že sudá n nevyhovují. Nejprve nahlédněme, že aby se při každém přípitku napil alespoň jeden trpaslík ze svého oblíbeného hrnečku, potom se při každém přípitku musel napít právě jeden trpaslík ze svého oblíbeného hrnečku. To proto, že trpaslíků a hrnečků je stejný počet a každý trpaslík má právě jeden oblíbený hrneček. Kdyby tedy existoval přípitek, při kterém by dva trpaslíci pili ze svých oblíbených hrnečků, nutně by existoval i přípitek, při kterém by nepil žádný trpaslík ze svého oblíbeného hrnečku.

Dále si jednotlivá místa u stolu, neboli počáteční pozice trpaslíků, očíslujme $0, 1, \ldots, n-1$, po směru hodinových ručiček. Potom nechť h_i je počet míst, o které se musí trpaslík na počátku sedící na pozici i $(0 \le i \le n-1)$ po směru hodinových ručiček posunout, aby se dostal ke svému oblíbenému hrnečku. Aby se při každém přípitku napil právě jeden trpaslík ze svého oblíbeného hrnečku, tak zřejmě čísla h_i musejí být po dvou různá. Zároveň se však jedná o prvky z množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Jinými slovy množiny $\{h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}\}$ a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ se rovnají, a tedy se rovnají i součty prvků v obou množinách. Z toho plyne

$$\sum_{i=0}^{n-1}(i+h_i) = \sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} h_i = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = (n-1)n. \tag{1}$$

Zároveň $i + h_i \mod n$ je pozice oblíbeného hrnečku trpaslíka na i-té pozici, tedy i tato čísla musejí být po dvou různá a náležet prvkům z množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, a tedy i množiny $\{h_0 \mod n, 1 + h_1 \mod n, \ldots, n-1+h_{n-1} \mod n\}$ a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ se rovnají, odkud

$$\sum_{i=0}^{n-1}(i+h_i) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} i \equiv \frac{(n-1)n}{2} \mod n,$$

a tedy podle (1)

$$\frac{(n-1)n}{2} \equiv 0 \mod n,$$

což ovšem pro žádná sudá n neplatí.

Zbývá uvést příklad vyhovujícího rozestavení pro lichá n. Například oblíbený hrneček trpaslíka na i-té pozici umístěme na pozici j, pro kterou $j \equiv 2i \mod n$. Platí, že se každý trpaslík napije ze svého oblíbeného hrnečku právě po i pootočeních, tj. při každém přípitku se takto napije právě jeden trpaslík ze svého oblíbeného hrnečku. Také se nám nestane, že bychom umístili dva hrnečky ke stejnému trpaslíkovi. Pokud ano, potom by zřejmě pro nějaká $i \neq j$ muselo platit $2i \equiv 2j \mod n$, nicméně n je liché, tj. nesoudělné s 2, a tedy je tato kongruence ekvivalentní s $i \equiv j \mod n$, což je spor. Uvedené rozestavení tedy splňuje zadané podmínky a my jsme hotovi.

(Alexandr Jankov)

Úloha N1. *Nechť přirozená čísla a, b, c, d splňují $ad \neq bc$ a $NSD(a, b, c, d) = 1$.*[1] *Označme S množinu těch čísel, která se dají vyjádřit jako $NSD(an + b, cn + d)$ pro nějaké přirozené n. Ukažte, že existuje číslo k takové, že S obsahuje právě všechny kladné dělitele k.*

[1] Zápis $\mathrm{NSD}(a_1, \ldots, a_n)$ značí největší přirozené číslo, které dělí všechna celá čísla $a_1, \ldots, a_n$.

Řešení. Nejdříve si úlohu zobecněme a předpokládejme, že b a d mohou být libovolná celá čísla a a i c libovolná nezáporná celá čísla. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $0 \leq a \leq c$.

Budeme postupovat silnou indukcí na a. Nejdříve vyšetřme případ, kdy je $a = 0$. Ze zadání platí $bc \neq 0$ a $NSD(b, c, d) = 1$. Označme si b' takové číslo, které získáme z čísla b tak, že v něm nebudeme uvažovat všechna prvočísla, která dělí zároveň b i c. Tímto zaručíme nesoudělnost b' a c. Ukážeme, že číslo b' už je hledaným číslem k ze zadání. Pokud číslo dělí b i c, tak už z podmínky nedělí d, a tedy nedělí ani $cn+d$. Z tohoto důvodu $NSD(b, cn+d) = NSD(b', cn+d)$, a tudíž $NSD(b, cn + d)|b'$ pro všechna přirozená n. Zbývá nám dokázat, že S obsahuje všechny kladné dělitele b'. K tomu stačí, aby aritmetická posloupnost $cn + d$ nabývala všech zbytků po dělení b', což díky nesoudělnosti b' a c skutečně nastává.

Nyní provedeme indukční krok. Mějme nějaké číslo a a předpokládejme, že tvrzení ze zadání platí pro všechna a' menší než a. Pomocí Euklidova algoritmu najdeme čtveřici a', b', c', d', která generuje stejnou množinu S jako a, b, c, d a zároveň platí $0 \leq a' < a$, díky čemuž budeme moct aplikovat indukční předpoklad. Označme $c = aq + r$, kde q i r jsou nezáporná celá čísla a r je zbytek čísla c po dělení a. Následně pro každé n platí

$$\begin{aligned} &NSD(an + b, cn + d) = NSD(an + b,(aq + r)n + d) \\ = &NSD(an + b, aqn + rn + d - q(an + b)) = NSD(an + b, rn + (d - qb)). \end{aligned}$$

Teď zvolme $a' = r, b' = d - qb, c' = a$ a $d' = b$. Protože r je zbytek po dělení a, tak máme zaručeno $0 \leq a' < a = c'$. Zbývá nám ověřit ostatní podmínky

$$NSD(a', b', c', d') = NSD(c - aq, d - qb, a, b) = NSD(c, d, a, b) = 1,$$

$$a'd' - b'c' = (c - aq)b - (d - qb)a = bc - ad \neq 0.$$

Můžeme tedy opravdu aplikovat indukční předpoklad a důkaz je dokončen.

Poznámky opravujícího. Většina řešitelů použila podobně jako ve vzorovém řešení Euklidův algoritmus (ať už s použitím indukce, nebo bez ní) a úlohu si zjednodušila na případ, kdy je jedna proměnná nulová. Číslo k šlo také přímo vyjádřit jako největší dělitel $ad - bc$ nesoudělný s $NSD(a, c)$. *(Martin Raška)*

Úloha A1. *Pavel našel reálná čísla a, b, c, d, která jsou v absolutní hodnotě větší než 1 a splňují vztah*

$$abc + bcd + cda + dab + a + b + c + d = 0.$$

Ukažte, že platí

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Řešení. Nejprve si dokazovanou nerovnost upravíme tak, že ji nejprve vynásobíme 2 a poté ke všem zlomkům levé strany přičteme jedničku, čímž dostaneme její ekvivalentní tvar $\frac{a+1}{a-1} + \frac{b+1}{b-1} + \frac{c+1}{c-1} + \frac{d+1}{d-1} > 4$.

Z podmínky na absolutní hodnotu Pavlových čísel zřejmě plyne $a^2 - 1 > 0$, takže platí $\frac{a+1}{a-1} = \frac{(a+1)^2}{a^2-1} > 0$, neboli všechny čtyři sčítance na levé straně dokazované nerovnosti jsou kladná čísla.

Nyní už si stačí uvědomit, že druhá podmínka je vlastně ekvivalentní s $(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d+1) = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$, takže z AG nerovnosti dostáváme $\frac{a+1}{a-1}+\frac{b+1}{b-1}+\frac{c+1}{c-1}+\frac{d+1}{d-1} \geq 4\left(\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)}\right)^{\frac{1}{4}} = 4$.

Zbývá už pouze ukázat, že nemůže nastat rovnost. V AG nastává rovnost pouze tehdy, jsou-li si všechna čtyři čísla rovna. Jelikož je ovšem funkce $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ zřejmě prostá, tak musí v případě rovnosti platit i $a = b = c = d$, takže a musí být kořenem rovnice $4(a^3 + a) = 0$, neboli $a = 0$, čímž ovšem dostáváme spor s $|a| > 1$ a rovnost tedy skutečně nemůže nastat.

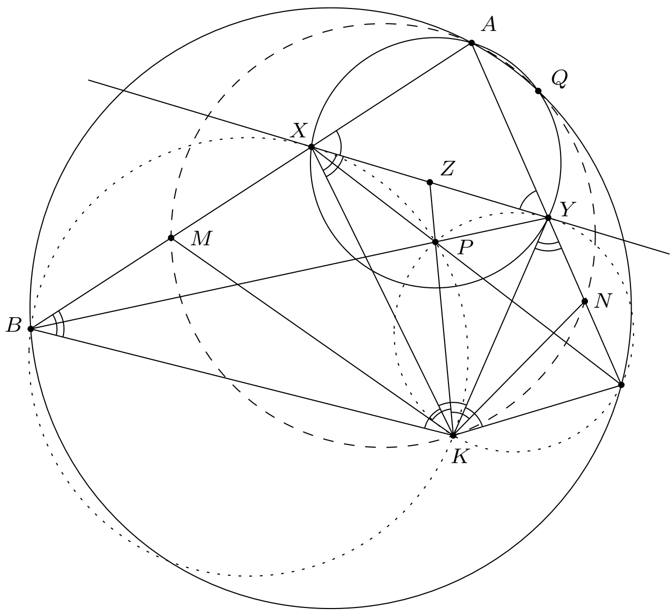
Poznámky opravujícího. Všechna úspěšná řešení pomocí řady algebraických úprav a substitucí dospěla k velmi podobnému postupu, jako vzorák. *(Danil Koževnikov)*

Úloha G1. *Kružnice ω_1 a ω_2 se protínají v bodech P a K. Jejich společná tečna bližší k P se dotýká ω_1 v X a ω_2 v Y. Přímka YP, resp. XP, protíná ω_1, resp. ω_2, v bodě B, resp. C. Nechť A je průsečík přímek BX a CY. Druhý průsečík kružnic opsaných AXY a ABC si označíme jako Q. Ukažte, že $\angle QXA = \angle QKP$.*

Řešení. Nejprve si všimněme, že K je střed spirální podobnosti, která zobrazuje BX na YC. Trojúhelníky BXK a YCK jsou proto podobné a z úsekových úhlů dále platí $\angle KYC = \angle KBX = \angle KXY$ a $\angle KXB = \angle KCY = \angle KYX$. Z toho plyne podobnost trojúhelníků $BKX \sim XKY \sim YKC$. Nechť $\angle BKX = \angle KXY = \angle YKC = \varphi$, pak $\angle AXY = 180° - \angle BXK - \angle KXY = 180° - \angle BXK - \angle KBX = \varphi$ a analogicky $\angle AYX = 180° - \angle CYK - \angle KYX = 180° - \angle CYK - \angle KCY = \varphi$.

Označme M a N středy úseček BX, resp. YC. V dané spirální podobnosti se středem v K se bod M zobrazí na bod N. Proto $\angle MKN = \angle BKY = 2\varphi$. Z velikosti $\angle MAN = \angle XAY = 180° - 2\varphi$ dále platí, že je čtyřúhelník $MANK$ tětivový.

Bod Q je středem spirální podobnosti, která převádí BX na CY, tedy i M na N. Úhel $\angle MQN = \angle XQY = \angle XAY = \angle MAN = 180° - 2\varphi$. Bod Q tedy leží na kružnici opsané MAN a pětiúhelník $MKNAQ$ je tětivový.



Průsečík přímek PK a XY označíme Z. Přímka PK je chordála kružnic ω_1 a ω_2, proto je Z střed úsečky XY. Z podobnosti trojúhelníků XKY a YKC vyplývá $\angle ZKY = \angle NKC$ a $\angle ZKN = \varphi$. Nyní doúhlíme $\angle QKP = \angle QKZ = \angle NKZ - \angle NKQ = \varphi - \angle NAQ = \varphi - \angle YAQ =$

$\varphi - (180^\circ - \angle AQY - \angle AYQ) = \varphi - 180^\circ + (180^\circ - \angle AXY) + \angle AYQ = \varphi - 180^\circ + 180^\circ - \varphi + \angle AYQ = \angle AXQ$, což jsme chtěli dokázat. Tato rovnost platí pro konfiguraci, ve které Q leží ve stejné polorovině vzhledem k přímce PK jako Y, pro opačný případ úhlíme analogicky.

Poznámky opravujícího. Obě úspěšná řešení využívala místo spirální podobnosti kruhovou inverzi. *(Hedvyka Ranošová)*