TR *i*KS ko

Úloha 1. *Označme S_n súčet všetkých n-ciferných čísel, ktorých dekadický zápis obsahuje iba cifry $1, 2, 3$, každú aspoň raz. Nájdite všetky celé čísla $n \geq 3$, pre ktoré je číslo S_n deliteľné siedmimi.*

Řešení. https://skmo.sk/dokument.php?id=439 □

Úloha 2. *V jednom rade je postavených n stĺpcov dámových kameňov tak, že medzi každými dvoma stĺpcami rovnakej výšky sa nachádza stĺpec vyšší. (Všetky kamene majú rovnakú výšku, niektoré stĺpce môžu byť tvorené aj jedným kameňom.) Najvyšší stĺpec obsahuje k kameňov. Pre dané k určte najvyššiu možnú hodnotu n.*

Řešení. https://www.matematickaolympiada.cz/media/3471665/a47ii.pdf □

Úloha 3. *Predpokladajme, že pro štvoricu po dvoch rôznych reálnych číslach a, b, c, d platí*

$$(a^2 + b^2 - 1)(a + b) = (b^2 + c^2 - 1)(b + c) = (c^2 + d^2 - 1)(c + d).$$

Dokažte, že $a + b + c + d = 0$.

Řešení. Upravujme rovnosť prvých dvoch

$$\begin{aligned} a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 - (a + b) &= c^3 + c^2b + cb^2 + b^3 - (c + b) \\ \iff (a^3 - c^3) + (a^2 - c^2)b + (a - c)b^2 - (a - c) &= 0 \\ \iff (a - c)\big[a^2 + ac + c^2 + (a + c)b + b^2 - 1\big] &= 0 \\ \iff a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca &= 1 \end{aligned}$$

lebo $a \neq c$. Analogicky $d^2 + b^2 + c^2 + db + bc + cd = 1$, teda ich odčítaním máme

$$\begin{aligned} (a^2 - d^2) + (a - d)b + (a - d)c &= 0 \\ \iff (a - d)\big[a + d + b + c\big] &= 0 \\ \iff a + b + c + d &= 0 \end{aligned}$$

□

Úloha 4. *Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s kružnicou opísanou Γ. Nech ℓ_b a ℓ_c sú priamky kolmé na BC, ktoré prechádzajú postupne B a C. Nech bod T leží na kratšom oblúku BC. Dotyčnica k Γ v bode T pretína s ℓ_b a ℓ_c v bodoch P_B a P_C. Kolmica na AC prechádzajúca cez P_B a kolmica na AB prechádzajúca cez P_C sa stretávajú v bode Q. Ak Q leží na priamke BC dokážte, že priamka AT prechádza Q.*

Řešení. Označme T' jako druhý průsečík přímky AQ a Γ. Ukažeme, že $T \equiv T'$.

Patu kolmice z P_B na AC označme U. Pak je čtyřúhelník P_BBUC cyklický, stejně jako $ABT'C$. Z toho vyplývá:

$$\angle QP_BB = \angle UP_BB = \angle ACB = \angle AT'B,$$

takže P_BBQT' je cyklický také. Speciálně $\angle AT'P_B = 90°$. Podobně platí $\angle AT'P_C = 90°$, takže přímka P_BP_C prochází bodem T'. Je tedy $T \equiv T'$, což už znamená, že přímka AT prochází bodem Q. $\square$