Zadanie 2. série

Termín odoslania: 24. júna 2024
Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`
Email na otázky: `info@iksko.org`

Úloha N2. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ spĺňajú

$$f(mn) = f(m)f(n)$$
$$m + n \mid f(m) + f(n).$$

Úloha A2. Pre všetky kladné celé čísla $n \geq 3$ nájdite najväčšie reálne číslo C_n, také že pre ľubovoľné po 2 rôzne kladné reálne čísla a_1, $a_2 \dots$, a_{2n} platí

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \cdots + \frac{a_{2n}}{|a_1 - a_2|} > C_n.$$

Úloha C2. V rovine je daných 2024 fialových a 2024 purpurových bodov, že žiadne 3 neležia na jednej priamke. Dvojicu kladných celých čísel (a, b) nazveme *dobrou*, ak existuje polrovina obsahujúca a fialových a b purpurových bodov. Koľko najmenej *dobrých* dvojíc môže daná množina bodov mať? Body, ktoré ležia na hranici polroviny, jej nepatria.

Úloha G2. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Nech priamky DA a BC sa pretínajú v bode E a nech priamky AB a CD sa pretínajú v bode F. Predpokladajme, že A, E, F ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou BD. Nech P leží na úsečke DA tak, že $|\measuredangle CPD| = |\measuredangle CBP|$, a nech Q leží na úsečke CD tak, že $|\measuredangle DQA| = |\measuredangle QBA|$. Nech AC a PQ sa pretínajú v bode X. Dokážte, že ak $|EX| = |EP|$, tak potom priamka EF je kolmá na AC.