Riešenie 2. série

Úloha G2. *Na stranách AB a BC konvexného štvoruholníka $ABCD$ sú postupne dané body M a N tak, že CM a AN delia jeho obsah na polovice. Dokážte, že MN rozpoľuje uhlopriečku BD.*

Riešenie. Z konvexnosti štvoruholníka (rozmyslite si) dostávame výpočty obsahov:

$$2 \cdot S_{ABCM} = S_{ABCD},$$

$$2\left(\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AC, B| + \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AC, M|\right) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot (|AC, B| + |AC, D|).$$

Odtiaľ

$$|AC, M| = \frac{|AC, D| - |AC, B|}{2},$$

a podobne

$$|AC, N| = \frac{|AC, D| - |AC, B|}{2} = |AC, M|.$$

Z tejto rovnice vyplýva rovnobežnosť MN s AC (okrem rovnakej vzdialenosti M, N od AC totiž máme aj polohu M, N v rovnakej polrovine AC) a aj tvrdenie zo zadania (napr. môžme zaviesť súradnicovú os kolmú na AC). *(Filip „Hip Hop“ Hanzely a Martin „Vodka“ Vodička)*

Úloha N2. *Mocninou (s veľkým M) nazveme také prirodzené číslo, čo sa dá zapísať v tvare a^n, kde a, n sú prirodzené čísla, $n > 1$.*

a) Dokážte, že existuje taká množina 2013 prirodzených čísel, že súčet prvkov ľubovoľnej jej podmnožiny nie je Mocnina.

b) Dokážte, že existuje taká množina 2013 prirodzených čísel, že súčet prvkov ľubovoľnej jej podmnožiny je Mocnina.

Riešenie. a) Stačí ak zoberieme množinu $\{p, 2p, \ldots, 2013p\}$ pre prvočíslo $p > \frac{2013 \cdot 2014}{2}$. Potom triviálne je súčet prvkov jej ľubovoľnej podmnožiny deliteľný p no je menší ako p^2 a preto nie je deliteľný p^2, a teda to určite nie je Mocnina.

b) (podľa Eduarda „Baklažána“ Batmendijna)
Dokážeme indukciou, že pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje číslo $s_k \in \mathbb{N}$, také že čísla $s_k, 2s_k, \ldots, ks_k$ sú Mocniny.

Pre $k = 1$ tvrdenie platí triviálne.

Nech platí pre k – čísla $s_k, 2s_k, \ldots, ks_k$ sú Mocniny. Potom $is_k = a_i^{q_i}$. Položme

$$s_{k+1} = s_k \cdot ((k+1)s_k)^{q_1 \cdots q_k}.$$

Zrejme

$$is_{k+1} = is_k \cdot \big((k+1)s_k\big)^{q_1 \cdots q_k} = a_i^{q_i} \cdot \left(\big((k+1)s_k\big)^{\frac{q_1 \cdots q_k}{q_i}}\right)^{q_i}$$

je Mocnina pre $1 \le i \le k$ a tiež

$$(k+1)s_{k+1} = (k+1) \cdot s_k \cdot \big((k+1)s_k\big)^{q_1 \cdots q_k} = \big((k+1)s_k\big)^{1+q_1 \cdots q_k}$$

je Mocnina – platí tvrdenie pre $k+1$. Teraz jednoducho zoberieme s_n pre $n \ge \frac{2013 \cdot 2014}{2}$ a množinu $\{s_n, 2s_n, \ldots, 2013s_n\}$. Súčet prvkov ľubovoľnej jej podmnožiny je násobok s_n, zároveň nanajvýš $\frac{2013 \cdot 2014}{2} \cdot s_n$, a teda z definície s_n to je Mocnina.

(Martin „Vodka“ Vodička a Filip „Hip Hop“ Hanzely)

Úloha C2. *V kruhu (vrátane hranice) s polomerom* 1 *máme* n *bodov. Dokážte, že aspoň* $\frac{n^2}{6} - \frac{n}{2}$ *dvojíc týchto bodov je vzdialených najviac* $\sqrt{2}$.

Riešenie (podľa Miroslava Stankoviča). Postupujme indukciou. Pre $n = 1$ to platí. Stačí nám teda ukázať, že medzi $n + 1$ bodmi existuje taký, ktorý je od aspoň

$$\left(\frac{(n+1)^2}{6} - \frac{n+1}{2}\right) - \left(\frac{n^2}{6} - \frac{n}{2}\right) = \frac{n-1}{3}$$

bodov vzdialený najviac $\sqrt{2}$.

Ak je nejaký bod v strede, môžme zvoliť ten. Ak žiadny nie je v strede, vezmime ľubovoľný bod X, urobme priemer prechádzajúci tým bodom a priemer na neho kolmý. Tým sme kruh rozdelili na 4 časti, pričom hranice priraďme ľubovoľne. Dva menšie štvrťkruhy neobsahujúce X označme A a B, zvyšný polkruh označme C. Počty bodov v nich označme $a, b, c + 1$. Body v A sú navzájom najďalej $\sqrt{2}$, to isté platí o bodoch v B. Nakoniec všetky body v C sú od bodu X vzdialené najviac $\sqrt{2}$.

Rozlíšme tri prípady:

- $n = 3k$

  Ak

  $$\begin{aligned} a - 1 < \frac{n-1}{3} = k - \frac{1}{3} \quad &\Rightarrow \quad a - 1 \leq k - 1 \\ b - 1 < \frac{n-1}{3} = k - \frac{1}{3} \quad &\Rightarrow \quad b - 1 \leq k - 1 \\ c < \frac{n-1}{3} = k - \frac{1}{3} \quad &\Rightarrow \quad c \leq k - 1, \end{aligned}$$

  potom $n - 2 = a - 1 + b - 1 + c \leq 3k - 3 = n - 3$, čo je spor.

- $n = 3k + 1$

  Ak

  $$\begin{aligned} a - 1 < \frac{n-1}{3} = k \quad &\Rightarrow \quad a - 1 \leq k - 1 \\ b - 1 < \frac{n-1}{3} = k \quad &\Rightarrow \quad b - 1 \leq k - 1 \\ c < \frac{n-1}{3} = k \quad &\Rightarrow \quad c \leq k - 1, \end{aligned}$$

  potom $n - 2 = a - 1 + b - 1 + c \leq 3k - 3 = n - 4$, čo je opať spor.

- $n = 3k + 2$

  Ak

  $$\begin{aligned} a - 1 < \frac{n-1}{3} = k + \frac{1}{3} \quad &\Rightarrow \quad a - 1 \leq k \\ b - 1 < \frac{n-1}{3} = k + \frac{1}{3} \quad &\Rightarrow \quad b - 1 \leq k \\ c < \frac{n-1}{3} = k + \frac{1}{3} \quad &\Rightarrow \quad c \leq k, \end{aligned}$$

  potom $n - 2 = a - 1 + b - 1 + c \leq k + k + k = n - 2$. Zostala nám tak jediná možnosť: všetky nerovnosti sú rovnosti. Podľa našej konštrukcie to znamená, že všetky body z A sú od bodov z B, C vzdialené viac ako $\sqrt{2}$, symetricky to platí o bodoch z B. Body v A môžme teda dať do jedného bodu, analogicky body v B (rozmyslite si dôkladne, že to môžme spraviť). Keďže však A aj B sú navzájom a aj od C vzdialené viac ako $\sqrt{2}$, tak C leží v jednom štvrťkruhu (rozmyslite si), takže počet dvojíc je

$$\frac{a(a-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}+\frac{(c+1)c}{2}=3\frac{(k+1)k}{2}=\frac{(n+1)^2}{6}-\frac{n+1}{2}.$$

Poznámky opravujúceho. K riešeniu sa dalo dopracovať viacerými cestami. Zaujímavý prístup zvolil Tonda, ktorý sa na to pozrel ako na graf, o ktorom vedel iba povedať to, že neobsahuje K_4, keďže ukázal, že medzi štyrmi bodmi v kruhu aspoň jedna dvojica má vzdialenosť maximálne $\sqrt{2}$. Čo sa týka príkladu, je známy ako aplikácia Turánovej vety. Na margo nemalej časti riešení, ktoré chceli oklamať opravovateľov, poviem len toľko, že hľadať najlepšie riešenie pre n spôsobom, že zostrojím najlepšie možné rozšírenie najlepšieho riešenia pre $n-1$, je logická chyba.

(Filip Sládek)

Úloha A2. *Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ spĺňa*

$$a_1=\frac{1}{2},\qquad a_{k+1}=-a_k+\frac{1}{2-a_k}$$

pre $k\geq 1$. Označme aritmetický priemer prvých n čísel postupnosti A_n. Dokážte, že

$$\left(\frac{1}{2A_n}-1\right)^n\leq A_n^n\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-1\right).$$

Riešenie (podľa Samuela Sládka a Le Anh Dung). Riešenie bude pozostávať z niekoľkých pozorovaní (počas úprav výrazov v celom riešení si poriadne uvedomte, prečo ich môžme urobiť).

Lemma. $0<a_i\leq\frac{1}{2}$.

Dôkaz. Obe nerovnosti dokážme indukciou. Ľavú priamo a pravú sporom. Pre $i=1$ tvrdenie platí.

$$(a_i-1)^2>0\Rightarrow a_{i+1}=-a_i+\frac{1}{2-a_i}=\frac{(a_i-1)^2}{2-a_i}>0.$$

$$a_{i+1}=-a_i+\frac{1}{2-a_i}>\frac{1}{2}\Rightarrow a_i(2a_i-3)>0\Rightarrow a_i>\frac{3}{2}.$$

□

Lemma. *Pre $a_1,\ldots,a_n\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ platí $\left(\frac{1}{A_n}-1\right)^n\leq\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-1\right)$.*

Dôkaz. Upravme nerovnosť na tvar

$$\left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}}\right)^n\leq\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)}{\prod_{i=1}^{n}a_i}.$$

Vľavo máme mocninu pomeru aritmetických priemerov čísel a_i a čísel stredovo súmerných s a_i podľa stedu $\frac{1}{2}$, vpravo zase mocninu pomerov geometrických priemerov. Použime klasický metódu ‚balance' a dokážme, že najhorší prípad v nerovnosti nastáva pre $a_1=\cdots=a_n$, kde sa ale nadobúda rovnosť, čím bude nerovnosť dokázaná. Nech teda BUNO $x+\varepsilon=a_1>a_2=x-\varepsilon$. Potom nahraďme túto dvojicu číslami $x=\frac{a_1+a_2}{2}, x=\frac{a_1+a_2}{2}$. Ľavá strana zrejme zostane rovnaká. Pravá strana sa prenásobí výrazom

$$\frac{(x+\varepsilon)(x-\varepsilon)(1-x)^2}{(1-x-\varepsilon)(1-x+\varepsilon)x^2},$$

o ktorom stačí ukázať, že je menší rovný než jedna. Ale to už necháme na čitateľa. Treba si jedine uvedomiť, aké môžu byť x a ε. □

K dokončeniu úlohy netreba nič viac, ako dokázať nerovnosť

$$\left(\frac{1}{2A_n}-1\right)^n \le A_n^n \cdot \left(\frac{1}{A_n}-1\right)^n \iff 0 \ge 2A_n^2 - 4A_n + 1.$$

Pretože A_n je zrejme menšie ako $\frac{1}{2}$, a teda menšie ako vačší z koreňov danej kvadratickej rovnice, riešenie dokončíme dvomi lemami. Označme c menší z dvojice koreňov rovnice $0 = 2x^2 - 4x + 1$.

Lemma. *$a_{2i-1} > c$ a $a_{2i} < c$.*

Dôkaz. Keďže $a_1 = \frac{1}{2} > c$, stačí ukázať, že postupnosť $a_i - c$ mení znamienka. To ale ľahko nahliadneme z rovnosti

$$a_{i+1} - c = \left(-a_i + \frac{1}{2-a_i}\right) - \left(-c + \frac{1}{2-c}\right) = (c - a_i)\left(1 - \frac{1}{(2-c)(2-a_i)}\right),$$

pretože posledný činiteľ je zrejme vačší ako 1. □

Lemma. *$A_n \ge c$.*

Dôkaz. $a_2 = \frac{1}{6}$. Všimnime si, že $a_{2i-1} + a_{2i} = \frac{1}{2-a_{2i-1}} \ge \frac{1}{1-c} \ge 2c$. Teraz pre párne n máme

$$A_n = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) + \left(a_3 + a_4\right) + \cdots + \left(a_{n-1} + a_n\right)}{n} > c,$$

lebo $\frac{2}{3} > 2c$. Pre nepárne n podobne máme

$$A_n = \frac{(a_1 + a_2) + \cdots + (a_{n-2} + a_{n-1}) + a_n}{n} > c,$$

lebo $a_n > c$. □

Poznámky opravujúceho. Úloha zjavne patrila do kategórie odpudzujúcich zadaním. Neštandardná bola tým, že nerovnosť iba konvergovala do rovnovážneho stavu. Preto bolo vidno, že prvých pár členov treba ošetriť akosi osobitne a potom to bude fajn, ako sa ukazuje v posledných lemách. Stačilo trochu citu a búšenia, do ktorého sa pustil Tonda a Baklažán to doslova umlátil. Gratulujeme. *(Filip Sládek a Martin Vodička)*