Zadání 3. série

Termín odeslání: 23. září 2024
Adresa submitka: www.iksko.org/submit
Email pro dotazy: info@iksko.org

Úloha N3. Šošo napsal na tabuli několik přirozených čísel. Pak přišel Džavo a několikrát provedl následující operaci: Vybral si dvě čísla a a b napsané na tabuli se stejnou paritou a dopsal na tabuli i $\frac{a+b}{2}$ (původní čísla a a b na tabuli nechal). Po nějaké době byla na tabuli napsaná čísla $1, 2, \ldots, n$. V závislosti na n určete, kolik nejméně čísel mohl Šošo na tabuli napsat.

Úloha C3. Rozhodněte, pro která přirozená čísla $n > 1$ existuje $2n$ bodů v rovině $P_1, \ldots, P_n$, $Q_1, \ldots, Q_n$ s následujícími vlastnostmi:

1. Žádné tři z nich neleží na jedné přímce.
2. Pro každé i od 1 do n platí $|P_iP_{i+1}| \geq 1$, kde $P_{n+1} = P_1$.
3. Pro každé i od 1 do n platí $|Q_iQ_{i+1}| \geq 1$, kde $Q_{n+1} = Q_1$.
4. Pro každé i a j od 1 do n platí $|P_iQ_j| \leq 1$.

Úloha G3. Střed strany BC ostroúhlého trojúhelníku ABC označíme M. Paty kolmic z M na AC a AB postupně označíme E a F. V rovině leží body X a Y tak, že $\triangle XEC \sim \triangle CEY$ a $\triangle BYF \sim \triangle XBF$ (trojúhelníky jsou podobné v tomto pořadí) a zároveň ani jeden z bodů E, F neleží na přímce XY. Dokažte, že XY je kolmá na AM.

Úloha A3. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(xf(y)) + f(y) = f(x + y) + f(xy).$$