Riešenia 5. série

Úloha N5. *Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré existujú celé čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ také, že*

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} = 1.$$

Riešenie. Najprv indukciou ukážeme, že taká n-tica existuje, pre všetky prirodzené n rôzne od 2,3,5.

Najprv nájdeme riešenia pre $n = 1, 6, 8$

$$\frac{1}{1^2} = 1 \qquad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} = 1$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} = 1$$

Teraz dokážeme, že ak vieme skonštruovať postupnosť pre n, tak potom vieme skonštruovať postupnosť aj pre $n + 3$, čím budeme mať postupnosti všetkých žiadaných dĺžok.

Majme z indukčného predpokladu postupnosť n čísel x_i spĺňajúce zadanie. Potom si všimnime, že postupnosť $x_1, x_1, ..., x_{n-1}, 2x_n, 2x_n, 2x_n, 2x_n$, tiež spĺňa zadanie, platí totiž

$$1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}^2} + \frac{1}{4x_n^2} + \frac{1}{4x_n^2} + \frac{1}{4x_n^2} + \frac{1}{4x_n^2}$$

Táto postupnosť má ale $n + 3$ prvkov, čo sme chceli.

Teraz ukážeme, že postupnosti dĺžky 2,3,5 neexistujú. Všimnime si, že ak je niektoré číslo rovné 1, tak už je náš súčet rovný 1, a teda naša postupnosť má nutne dĺžku 1, keďže neexistuje prirodzené číslo x, také, že $\frac{1}{x} \leq 0$.

Ďalej pre našu postupnosť vieme, že $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$. Teda pre $n = 2, 3$ to nepôjde.

Ďalej sa pozrime na 5-člennú postupnosť, ak sú v nej najviac tri 2. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} < 1$. Teda nutne 4 členy musia byť 2, a keďže už tieto 4 dávajú súčet 1 tak piaty musí byť 0, čo je spor. *(Samuel Sládek)*

Úloha G5. *Nech O je stred opísanej kružnice trojuholníka ABC. Body E, F ležia na úsečkách OB, OC tak, že platí $|BE| = |OF|$. Nech M, N sú stredy oblúkov EOA a AOF. Dokážte, že $|\sphericalangle ENO| + |\sphericalangle OMF| = 2|\sphericalangle BAC|$.*

Riešenie. Označme si uhly v trojuholníku štandardne α, β, γ. Potom zrejme platí, že $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$, $|\sphericalangle AOC| = 2\beta$,$|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$.

Vieme, že $|\sphericalangle ANF| = |\sphericalangle AOF|$, lebo sú to obvodové uhly nad AF. Trojuholníky AOC a ANF sú oba rovnoramenné, a majú zhodný uhol oproti základni, a preto sú podobné. Dokonca sú špiralovo podobné so stredom v A. A keďže špirálna podobnosť chodí po dvoch, tak sú podobné aj trojuholníky ANO a AFC. Preto $|\sphericalangle AON| = |\sphericalangle ACF| = 90° - \beta$. Potom ľahko dopočítame, že $|\sphericalangle EON| = 2\gamma - 90° + \beta$. Tak isto z tej podobnosti dostávame aj to, že $|NO| : |FC| = |AO| : |AC|$. A keďže $|FC| = |OE|$, tak máme, že $|NO| : |OE| = |AO| : |AC|$.

Nech N_0 je taký bod v polrovine AOB, že $\triangle AN_0O \sim \triangle AOC$. Zrejme platí, že $|\sphericalangle N_0OB| = 2\gamma - 90° + \beta$, lebo $|\sphericalangle AON_0| = 90° - \beta$. A z podobnosti, pomocou ktorej sme definovali N_0 máme, že

$$|N_0O| : |OB| = |N_0O| : |OC| = |AO| : |AC| = |NO| : |OE|.$$

To znamená, že trojuholníky N_0OB a NOE sú podobné podľa vety *sus*. Preto $|\sphericalangle ENO| = |\sphericalangle BN_0O|$.

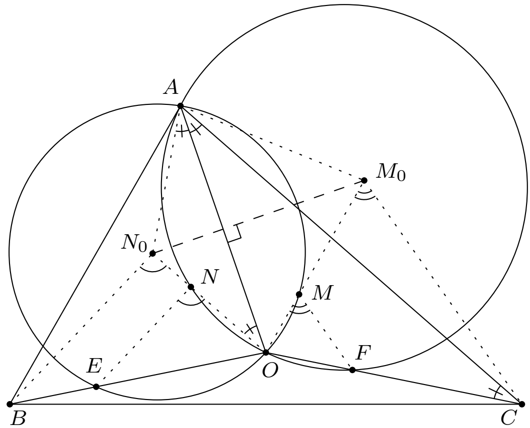
Úplne analogicky definujeme bod M_0 ako taký bod v polrovine AOC, že $\triangle AM_0O \sim \triangle AOB$ a úplne rovnako dostaneme, že $|\sphericalangle OMF| = |\sphericalangle OM_0C|$. Takže potrebujeme ukázať, že $|\sphericalangle BN_0O| + |\sphericalangle OM_0C| = 2\alpha$.

Zrejme N_0M_0 je os úsečky AO, keďže trojuholníky AM_0O a AN_0O sú rovnoramenné. Potom platí, že $|\sphericalangle AN_0M_0| = |\sphericalangle AN_0O|/2 = \beta$. Tak isto $|\sphericalangle AM_0N_0| = \gamma$. Vidíme, že trojuholníky AN_0M_0 a ABC sú podobné podľa vety uu. S/ opäť špirálovo podobné, a preto sú podobné aj trojuholníky AN_0B a AN_0C a dostávame, že $|\sphericalangle ABN_0| = |\sphericalangle ACM_0|$. Z toho vidíme aj to, že jeden z bodov M_0, N_0 leží vnútri ABC a jeden mimo. (Okrem špeciálneho prípadu, keď oba ležia na stranách ABC. No vtedy veštko platí rovnako, napriek tomu, že niektoré trojuholníky sú degenereované.) BUNV nech teda N_0 leží vnútri.

A teraz už stačí len počítať:

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle BN_0O| + |\sphericalangle OM_0C| &= 360^\circ - |\sphericalangle BON_0| - |\sphericalangle OBN_0| - |\sphericalangle M_0OC| - |\sphericalangle OCM_0| \\
&= 540^\circ - 3\beta - 3\gamma - |\sphericalangle OBN_0| - |\sphericalangle OCM_0| \\
&= 3\alpha - (|\sphericalangle ABO| - |\sphericalangle ABN_0|) - (|\sphericalangle OCA| + |\sphericalangle ACM_0|) \\
&= 3\alpha - |\sphericalangle ABO| - |\sphericalangle OCA| \\
&= 3\alpha - (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \beta) = 2\alpha
\end{aligned}$$

Čím je úloha dokázaná.



(Martin „Vodka“ Vodička)

Úloha C5. *Máme nekonečný štvorčekový papier. Každý štvorček je zafarbený jednou z 41 farieb tak, že žiaden obdĺžnik s obvodom 20, ktorý obsahuje len celé štvorčeky, neobsahuje dva štvorčeky jednej farby. Dokážte, že žiaden obdĺžnik* 1×41 *neobsahuje dva štvorčeky rovnakej farby.*

Riešenie. Najprv si označím pojmy, ktoré budem používať. Nech má každý štvorček kartezianske súradnice. Vzdialenosťou štvorčekov $X[x_1, x_2]$, $Y[y_1, y_2]$ si označím $V(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Platí $V(X, Y) + V(Y, Z) \geq V(X, Z)$. Zrejme dva štvorčeky sú spolu v (nejakom) obdĺžniku s obvodom 20 práve vtedy, ak ich vzdialenosť je nanajvýš 8.

Kruhom so stredom X si označím množinu štvorcov so vzdialenosťou nanajvýš 4 od X, písať budem $K(X)$. Ukážem, že všetky štvorčeky v kruhu majú po dvojiciach rôzne farby. Nech štvorčeky A, B sú v $K(X)$. Pre ich vzdialenosť platí $V(A,B) \leq V(A,X)+V(X,B) \leq 4+4=8$, teda sú v nejakom obdĺžniku s obvodom 20, a teda majú rôzne farby. Keďže kruh obsahuje 41 štvorčekov, obsahuje každú farbu práve raz.

Pozrime sa na farbu F. Uvažujme kruhy so stredmi na štvorčekoch farby F. Ukážem, že dané kruhy pokrývajú rovinu a neprekrývajú sa navzájom (tj. každý štvorček je v práve jednom kruhu).

Sporom, nech štvorček X je v rôznych kruhoch $K(A)$ aj $K(B)$ a štvorčeky A, B sú rovnakej farby. Potom $V(A,B) \leq V(A,X)+V(X,B) \leq 4+4=8$. Teda A a B sú v obdĺžniku s obvodom 20, čo je spor - **kruhy sa neprekrývajú**.

Sporom, nech štvorček X je mimo každého kruhu so stredom na farbe F. Štvorček X je preto vzdialený aspoň 5 od každého stredu kruhu, teda je vzdialený aspoň 5 od každého štvorčeka farby F. Kruh $K(X)$ zrejme neobsahuje štvorček farby F, čo je spor - **kruhy pokrývajú celú rovinu**.

Teraz ukážem, že dané kruhy sú umiestnené pravidelne. Pozrime sa na nejaké susediace kruhy $K(A)$, $K(B)$. Prizrime sa na štvorec 2×2 štvorčekov taký, že jeden štvorček z nich je v $K(A)$, jeden je v $K(B)$ a 'ostatné' 2 štvorčeky sú mimo $K(A)$ aj mimo $K(B)$. Zrejme žiaden kruh nemôže pokryť obe 'ostatné' štvorčeky bez toho, aby prekryl nejaký z kruhov $K(A)$, $K(B)$. Teda do daného štvorca 2×2 musia zasahovať 4 rôzne kruhy.

Ide ľahko ukázať, že štvorce 2×2 splňujúce vlastnosť nad sú pre každú dvojicu susedných kruhov dva a v oboch je vzájomná poloha kruhov (zasahujúcich do nich) rovnaká. Teda vo všetkých spomínaných štvorcoch 2x2 je vzájomná poloha kruhov rovnaká. Stredy štvorcov (a teda štvorčeky rovnakej farby) sú buď vždy posunuté o vektory $[4,5]$ a $[-5,4]$ alebo vždy posunuté o vektory $[5,4]$ a $[-4,5]$.

Overiť, že v daných možnostiach neexistuje obdĺžnik 1×41 (tj. overiť, že štvorčeky rovnakej farby v rovnakom riadku (resp. stĺpci) sú od seba vzdialené aspoň 41) je triviálne - buď nakreslením obrázku alebo vyjadrením z vektorov. *(Slavomír Hanzely)*

Úloha A5. *Nájdite všetky funckie $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré spĺňajú nasledovnú podmienku: Pre každé, navzájom rôzne reálne čísla a, b, c platí, že existuje trojuholník so stranami a, b, c práve vtedy, keď existuje trojuholník so stranami $f(a), f(b), f(c)$.*

Riešenie. Najprv dokážeme, že naša funckia je prostá. Nech $f(a) = f(b)$, pre $a < b$. Potom ale $a/2, a/2+\varepsilon, a$ sú strany trojuholníka a $a/2, a/2+\varepsilon, b$ nie sú strany trojuholníka (pre $\varepsilon < \min(b-a, a/2)$). Z toho vyplýva, že $f(a/2), f(a/2+\varepsilon), f(a)$ sú strany trojuholníka a $f(a/2), f(a/2+\varepsilon), f(b)$ nie sú. To je ale zrejme spor, lebo $f(a) = f(b)$, takže obe trojice buď sú alebo nie sú strany trojuholníka. Preto je f prostá.

Teraz dokážeme, že f je rastúca. Nech $f(a) > f(b)$ pre $a < b$. Položme $\varepsilon < \min((b-a)/2, a/2)$. Potom ak $c, d \in (a/2, a/2+\varepsilon)$ a $c \neq d$, tak (a,c,d) sú strany trojuholníka, ale (b,c,d) nie sú. (Lebo $c, d < a$ a $a < c+d < b$.) Z toho vyplýva, že $f(a), f(c), f(d)$ sú strany trojuholníka a $f(b), f(c), f(d)$ nie sú. Zjavne x, y, z sú strany trojuholníka práve vtedy, keď $|x-y| < z < x+y$. To znamená, že musí platitť $|f(c)-f(d)| < f(a) < f(c)+f(d)$, ale $f(b) \notin (|f(c)-f(d)|, f(c)+f(d))$. No my vieme, že $f(a) > f(b)$, a preto nutne $f(b) \leq |f(c)-f(d)|$.

Vieme, že pre ľubovoľné dve čísla z intervalu $(a/2, a/2+\varepsilon)$ platí, že ich rozdiel funkčných hodnôt je aspoň $f(b)$. To však nie je možné, lebo v intervale je nespočítateľne veľa čísel, a tak v aspoň jendom zo spočítateľne veľa intervalov $[kf(b)/2, (k+1)f(b)/2]$ budú aspoň dve (dokonca niekde ich bude nekonečne veľa) funkčné hodnoty. To je ale spor, a preto je f rastúca.

Vieme, že $x < y < z$ sú strany trojuholníka práve vtedy, keď $x + y < z$. Preto z našej podmienky zo zadania dostaneme, že pre $c > a, b$ platí, že $c < a+b \Leftrightarrow f(c) < f(a)+f(b)$. Špeciálne pre $c = a+b$ máme, že $f(a+b) \geq f(a)+f(b)$, samozrejme stále len pre rôzne a, b.

Teraz dokážeme, že f nadobúda ľubovoľne malú hodnotu. Predpokladajme, že existuje také $\delta > 0$, že$f(a) \geq \delta$, pre všetky $a \in \mathbb{R}$. Potom pre ľubvoľné $a \in \mathbb{R}$ máme, že $f(a) \geq f(a/3) +$

$f(2a/3) \geq 2\delta$. No potom indukciou dostaneme, že $f(a) \geq 2^k\delta$ pre všetky prirodzené k a všetky reálne a, čo je samozrejme spor pre k také, že $2^k > f(a)/\delta$.

Predpokladajme, že $f(a+b) > f(a) + f(b)$ pre nejaké $a \neq b$. Nájdime také c, že $f(c) < f(a+b) - f(a) - f(b)$. Keďže f je rastúca môžeme zobraž také c, že $c < a, b$. Potom platí, že $c, a+b-c/2, a+b$ tvoria trojuholník, a teda $f(c) + f(a+b-c/2) > f(a+b)$. Lenže $f(a+b-c/2) < f(a) + f(b)$ (lebo $a, b, a+b-c/2$ sú strany trojuholníka). Z toho dostaneme, že $f(c) + f(a+b-c/2) < f(a+b) - f(a) - f(b) + f(a) + f(b) = f(a+b)$, čo je spor. Preto dostávame, že nutne $f(a+b) = f(a) + f(b)$, pre všetky rôzne a, b.

A teraz to nie je veľky problém dokázať aj pre $a = b$, lebo $f(a) + f(a) = f(a) + f(a/3) + f(2a/3) = f(4a/3) + f(2a/3) = f(2a)$. Takže to naozaj platí pre všetky a, b.

A to už je známa Cauchyho úloha. Pre úplnosť uvedieme náznak jej riešenia. Najprv indukciou ukážeme, že $f(k) = kf(1)$, pre všetky prirodzené k. Potom analogicky dostaneme, že aj $f(kx) = kf(x)$, pre ľubovoľné x. Špeciálne pre $x = m/k$ dostaneme, že $f(m) = kf(m/k)$, a teda $f(m/k) = m/kf(1)$. Inak povedané $f(q) = qf(1)$, pre všetky racionálne q.

A na všetky kladné reálne čísla to rozšírime vďaka rastúcosti f. Totiž ak pre nejaké reálne číslo r platí $f(r) < rf(1)$, tak existuje racionálne číslo q také, že $f(r) < qf(1) < rf(1)$. Potom ale pltí, že $r > q$ a zároveň $f(q) > f(r)$, čo je spor s rastúcosťou f. Obdobne dôjdeme k sporu ak $f(r) > rf(1)$. Preto musí platiť, že $f(x) = xf(1)$, pre všetky kladné reálne čísla x.

Ľahko skúškou overíme, že tieto funkcie naozaj vyhovujú. Hľadané funckie sú teda $f(x) = cx$, pre ľubovoľné kladné reálne číslo c. *(Martin „Vodka“ Vodička)*