Zadania 5. série

Termín odoslania: 9. 1. 2017

Adresa:
KMS – iKS
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha N5. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré existujú celé čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ také, že

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} = 1.$$

Úloha G5. Nech O je stred opísanej kružnice trojuholníka ABC. Body $E,\ F$ ležia na úsečkách $OB,\ OC$ tak, že platí $|BE| = |OF|$. Nech $M,\ N$ sú stredy oblúkov EOA a AOF. Dokážte, že $|\sphericalangle ENO| + |\sphericalangle OMF| = 2|\sphericalangle BAC|$.

Úloha C5. Máme nekonečný štvorčekový papier. Každý štvorček je zafarbený jednou z 41 farieb tak, že žiaden obdĺžnik s obvodom 20, ktorý obsahuje len celé štvorčeky, neobsahuje dva štvorčeky jednej farby. Dokážte, že žiaden obdĺžnik 1×41 neobsahuje dva štvorčeky rovnakej farby.

Úloha A5. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré spĺňajú nasledovnú podmienku: Pre každé, navzájom rôzne reálne čísla a, b, c platí, že existuje trojuholník so stranami a, b, c práve vtedy, keď existuje trojuholník so stranami $f(a), f(b), f(c)$.