Riešenia 5. série

Úloha G5. *Patrik si kúpil nadupaný 3D televízor a očakáva na ňom aj patričný 3D obsah. Daný je štvorsten $ABCD$. Sféra s prechádzajúca bodom A, pretína hrany AB, AC, AD postupne v bodoch E, F, G. Prienik s a gule opísanej štvorstenu $ABCD$ je kružnica, ktorá leží v rovine rovnobežnej s rovinou BCD. Nech R, S, T sú obrazy bodov E, F, G v stredových súmernostiach podľa stredov hrán AB, AC, AD. Dokážte, že body B, C, D, R, S, T ležia na jednej sfére.*

Riešenie. Väčšina z vás to riešila nejakým prevedením do 2D situácie. My si ukážeme riešenie, ktoré to rovno vyrieši v 3D, lebo si myslím, že je pekné.

Ako prvé si uvedomíme, že mocnosť bodu ku sfére funguje rovnako ako ku kružnici. Platí to preto, lebo ľubovoľný rez sféry je kružnica.

Ďalej si uvedomíme, že môžeme zadefinovať chordálu 2 sfér ako množinu bodov, ktoré majú rovnakú mocnosť k tým 2 sféram. Ľahko si uvedomíme, že to musí byť rovina a hoci to nebudeme potrebovať, tak musí byť aj kolmá na spojnicu stredov (zase to funguje rovnako ako v rovine).

Ako posledné si uvedomíme, že chordály 3 sfér sa buď všetky pretínajú na 1 priamke alebo sú rovnobežné, lebo keď bod leží na 2 chordálach leží aj na tretej.

Tak a teraz sa môžeme pustiť do našej úlohy. Uvažujme 3 sféry a to s, sféru opísanú $ABCD$ a sféru opísanú $BCDR$. O tej poslednej chceme dokázať, že na nej ležia aj body S, T. Chordála posledných dvoch je zrejme rovina BCD. Chordála prvých dvoch je rovina, v ktorej leží prienik s a sféry opísanej $ABCD$, o ktorej vieme, že je rovnobežná s BCD. Preto aj chordála prvej a tretej sféry músi byť s nimi rovnobežná.

Nech K, L, M sú stredy hrán AB, AC, AD. Zrejme platí $|KR| \cdot |KB| = |KE| \cdot |KA|$. Bod R má rovnakú mocnosť ku s a sfére opísanej $BCDR$, teda leží na ich chordále. Rovina KLM je však zjavne rovnobežná s rovinou BCD (je to akási stredná priečka) a preto to musí byť chordála tých 2 sfér. Pre druhý priesečník $X \neq C$ sféry opísanej $BCDR$ a priamky AC musí platiť $|LX| \cdot |LC| = |LF| \cdot |LA|$. Táto rovnosť je splnená len pre bod S, preto S leží na tej sfére. Analogicky tam leží aj T (čo sme chceli dokázať).

Veľa z vás to vyriešilo tak, že tento postup (alebo niečo podobné) aplikovali v rovine ABC, čím dokázali, že $BCRS$ je tetivový (obdobne ostatné štvorice). Z toho už ľahko plynie (premyslite si), že tých 6 bodov leží na 1 sfére. Chcel som ukázať, že to nebolo potrebné a že niektoré pekné veci sa dajú zovšeobecniť aj do 3D :) *(Martin „Vodka“ Vodička)*

Úloha N5. *Daných je n ($n \geq 2$) po dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel, pričom súčin ľubovoľných $n-1$ z nich dáva po delení tým posledným vždy ten istý zvyšok r. Dokážte, že $r \leq n-2$.*

Riešenie. Označme si zadané čísla ako $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pričom $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Keby platilo $r = 0$, tvrdenie platí triviálne (špeciálne keď $a_1 = 1$ tak nutne $r = 0$). Uvažujme už len $r > 0$ (teda nutne aj $a_1 > 1$). Označme ešte:

$$S = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_1} + \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_2} + \ldots + \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_n} > r > 0 \quad \text{(premyslite si)}$$

Všetky sčítance v S sú násobkami a_i a i-ty sčítanec dáva zo zadania zvyšok r, preto $a_i \mid S - r$ pre $1 \leq i \leq n$, čo dokopy s nesúdeliteľnosťou a-čok dáva $a_1 a_2 \ldots a_n \mid S - r$. Keďže $S - r > 0$ môžme to bez problémov odhadnúť takto:

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leq S - r < S \leq n(a_2 a_3 \ldots a_n)$$

Dokopy to dáva $a_1 a_2 \ldots a_n < n(a_2 a_3 \ldots a_n) \Rightarrow a_1 < n$. Spolu s $r < a_1$ máme $r < a_1 < n \Rightarrow r \leq n-2$. Hotovo. *(Miro Psota)*

Úloha C5. *Máme 2 dostatočne dlhé pásy papiera. Na prvom je napísané písmeno A, na druhom je písmeno B. V každom kroku si vyberieme jeden pás. To, čo je naňom napísané, napíšeme pred alebo za obsah druhého pásu. Dokážte, že po 2014 krokoch je možné rozdeliť obsah prvého pásu na 2 palindrómy.*

Riešenie. Môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že prvý ťah bol (A, B) na (A, AB). Ďalej si označme $X = A$, $Y = AB$, čiže po prvom ťahu máme slová (X, Y). Ľahko vidno, že po ľubovoľnom nenulovom počte ťahov, môžeme obe slová rozdeliť na úseky A a AB, čiže ich môžeme napísať v X,Y.

Dôkaz budeme robiť indukciou. Po nula ťahoch je tvrdenie zjavne pravdivé. Predpokladajme, že po n ťahoch, slová na papierikoch ide rozdeliť na 2 palindrómy. Po $n + 1$ ťahoch si zoberieme slovo napísané v A,B a napíšeme ho v X,Y. Teraz sa na toto slovo pozrime ako po n ťahoch robené s X,Y. Naň sa už vzťahuje indukcia, čiže ho môžeme rozdeliť na dva palindrómy v X,Y. Teraz prichádza hlavná myšlienka. Palindróm napísaný v X,Y, si môžeme predstaviť ako striedajúcu postupnosť X-iek (vrátane prázdnej postupnosti) a jedného Y. Keďže je to palindróm, tak dĺžky jednotlivých postupností Xiek, sú podľa stredu palindrómu symetrické. Skúsme napísať tento palindróm v pôvodných písmenkách A,B, a to takýmto spôsobom: Namiesto každého Y, napíšme B. Keďže $Y = AB$, tak pred každým Bčkom je teraz o jedno Ačko menej. Aby sme to napravili, tak namiesto každej postupnosti (ktorá je pred nejakým Bčkom) Xiek ($X = A$) napíšme o jedna dlhšiu postupnosť Ačiek. Jediná postupnosť Xiek, ktorá nie je pred nejakým Bčkom, je tá posledná, čiže namiesto nej napíšme len rovnako dlhú postupnosť Ačiek. Takto dostaneme pôvodné slovo napísané v A,B. Toto slovo je oproti palindrómu napísanému v X,Y, odlišné akurát v tom, že postupnosti Ačiek medzi jednotlivými Bčkami, sú o jedna dlhšie (až na tú poslednú postupnosť) ako postupnosti X medzi jednotlivými Ynami. To znamená, že stačí zobrať jedno Ačko zľava a máme palindróm, napísaný v A,B. Čiže celkovo platí: Každý neprázdny palindróm v X,Y, sa dá napísať ako $A + P$, kde P je palindróm v A,B (hoci aj prázdny).

Takže, ak S je slovo po $n+1$ ťahoch, dá sa napísať ako $S = P_1 + P_2$ kde P_1, P_2 sú palindrómy v X,Y. Ak sú oba palindrómy neprázdne tak platí $S = P_1 + P_2 = A + P_3 + A + P_4 =$, kde P_3, P_4 sú palindrómy v A,B, čiže S sa dá napísať ako súčet palindrómu $A + P_3 + A$ a P_4. Ak by bol napríklad P_2 prázdny palindróm, tak $S = P_1 = A + P_3$, čo je opäť súčet dvoch palindrómov v A,B. Celkovo máme, že po $n + 1$ ťahoch, vieme obe slová napísať ako súčet dvoch palindrómov v A,B. Týmto je indukcia dokončná, takže to platí aj po 2014 ťahoch a teda dôkaz je hotový.

(Viktor Lukáček)

Úloha A5. *Do každého políčka tabuľky $n \times n$ napíšeme kladné reálne číslo tak, že súčet čísel v každom riadku je rovný 1. Ak vyberieme n políčok tak, že z každého riadku a stĺpcu vezmeme práve jedno, je súčin čísel v týchto políčkach menší alebo rovný súčinu čísel na diagonále. Dokážte, že súčet čísel na diagonále je aspoň 1.*

Riešenie. Veľa riešení nám neprišlo :), a aj ak ste to skúšali, zrejme ste sa to snažili umlátiť nejakými nerovnosťami a indukciou, ale ono to stále nevychádzalo, lebo tie niektoré nerovnosti to odhadovali zo zlej strany.

Neviem, či sa to takto nejako vôbec dalo vyriešiť. Keď už aj nerovnosti zlyhávajú, treba to skúsiť riešiť inak. My si ukážeme riešenie, ktoré je trocha kombinatorické. Spočíva v tom, že tá podmienka o súčinoch je dosť silná a keď uvažujeme nerovnosti väčšinou ju využívame len pre nejaké konkrétne výbery políčok, alebo pre súčin podmienok atď. Nám ju stačí využiť pre pár špeciálnych výberov políčok. Aké políčka vyberieme? Na to bude treba trocha kombinatorického uvažovania :). Celé tvrdenie dokážeme sporom. Nech je súčet prvkov na diagonále menší ako 1.

Čo teraz? Nás budú zaujímať políčka, ktoré sú väčšie ako prvky na diagonále (tie by mohli mať väčší súčin a mali by sme spor). V každom stĺpci zafarbime všetky políčka, ktoré sú väčšie ako políčko v danom stĺpci na diagonále.

Môžeme si uvedomiť, že nutne sme zafarbili z každého riadka aspoň 1 políčko, lebo ak nie, súčet čísel v tomto riadku by bol menší rovný ako súčet na diagonále. My ale vieme, že súčet čísel v riadku je 1.

Bolo by fajn keby sme zo zafarbených políčok vedeli vybrať n takých, že v každom riadku a v každom stĺpci je práve 1. Potom by sme mali hľadaný spor. Dokonca nemusíme vybrať n. Stačí nám niekoľko políčok, ktoré ležia v tých istých riadkoch ako stĺpcoch, a žiadne dve neležia v tom istom riadku ako stĺpci. Potom ich len doplníme číslami z diagonály a stále máme spor.

A to už vyzerá na ľahký kombinatorický problém :). Vyriešime ho hýbaním sa v tabuľke. Začneme na prvom políčku diagonály. Potom sa posunieme na zafarbené políčko v tom riadku (je tam aspoň 1). Odtiaľ sa v stĺpci posunieme na políčko na diagonále a toto opakujeme. Je jasné, že po čase sa dostaneme na políčko na diagonále, kde sme už boli. A aby nevznikol bordel, zoberme si prvé také.

Pozrime sa na políčka, ktoré sme prešli medzi tým ako sme ho 2 krát navštívili. Obsahuje niekoľko políčok na diagonále a rovnako políčok mimo nej. Tieto políčka ležia v tých istých riakdoch a stĺpcoh ako políčka na diagonále. Keď ich doplníme ostatnými políčkami z diagonály, tak majú zrejme väčší súčin ako diagonála (z definície farebných políčok) a to je tá naša hľadaná množina. Spor. *(Martin „Vodka“ Vodička)*