Mezinárodní korespondenční seminář

Medzinárodný korešpondenčný seminár

*i*KS

12. ročník
2022/2023

web: *www.iksko.org* e-mail: *info@iksko.org*

Milý příteli !

Vítej mezi námi! *i*KS je korespondenční seminář, na jehož provozu spolupracují organizátoři Matematického korespondenčního semináře KAM MFF UK (`mks.mff.cuni.cz`) a Korešpondenčného matematického seminára (`www.kms.sk`). Nahrazuje bývalou nejtěžší kategorii γ v KMS, je tedy určen zejména pro pokročilé řešitele. Budeme nicméně rádi za každé došlé řešení či jen jeho náznak. Jediná vyřešená úloha již může znamenat slušné umístění!

Letošní ročník začíná již v tomto školním roce a skončí před celostátním kolem Matematické olympiády následující rok. Během roku proběhne celkem šest sérií – jejich řešení můžeš psát česky, slovensky, ale i anglicky.

Každá série sestává ze čtyř úloh, které pokrývají čtyři základní typy problémů na matematických olympiádách: **algebra** (A), **kombinatorika** (C), **geometrie** (G) a **teorie čísel** (N). Za každou úlohu lze získat 0 – 7 bodů. Příklady se snažíme řadit od nejlehčího po nejtěžší.

Ostatní pravidla *i*KS jsou prakticky totožná s pravidly ostatních korespondenčních seminářů, viz např. `kms.sk/pravidla`. **Řešení přijímáme pouze elektronicky** pomocí odevzdávátka na našem webu (`http://iksko.org/submit`).

Konečně, proč vlastně *i*KS řešit? Především jde o velmi dobrou přípravu na Matematickou olympiádu i mezinárodní matematické soutěže. Nejlepší řešitelé dále získají **hodnotné matematické knihy** dle vlastního výběru, absolutní vítěz navíc **tričko s prestižním nápisem** „Vyhral som *i*KS“! Kromě toho i v tomto ročníku chystáme exkluzivní ***i*KS soustředění** pro nejlepší řešitele, které je bezesporu nejvíce matematicky nabitou akcí svého druhu v Česku i Slovensku. Více naleznete na adrese `www.iksko.org`.

Matematický Korespondenční Seminář

SK MO

Korešpondenčný matematický seminár

Zadání 1. série

Termín odeslání: 16. květen 2022

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha N1. Pro kladné celé číslo n označme jako $f(n)$ počet čísel $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ takových, že j a n jsou soudělná[1], ale n není násobkem j. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo k má rovnice $f(n) = k$ jen konečně mnoho řešení n.

Úloha G1. Na parabole p s ohniskem F leží body A, B. Tečny k p v bodech A, B se protnou v bodě T. Dokažte, že trojúhelníky AFT a TFB jsou si podobné.

Úloha A1. Nechť $\mathbb{Q}[x]$ značí množinu všech polynomů v proměnné x s racionálními koeficienty. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$, které pro libovolné polynomy $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ splňují:

(i) $f(P \circ Q) = f(Q \circ P)$, kde $\circ$ značí operaci skládání polynomů.

(ii) Pokud $P \cdot Q \neq 0$, pak $f(P \cdot Q) = f(P) + f(Q)$.

Úloha C1. Jsou dána přirozená čísla m a k. Určete nejmenší kladné reálné číslo c takové, že pro každé kladné celé číslo n a každý km-regulární graf[2] na n vrcholech existuje obarvení jeho vrcholů m barvami, v němž nejvýše cn hran spojuje dva vrcholy stejné barvy.

[1] Přirozená čísla a, b nazveme *soudělnými*, pokud mají společného dělitele většího než 1.

[2] Graf nazýváme *a-regulárním*, má-li každý jeho vrchol stupeň přesně a.