Riešenia 2. série

Úloha N2. *Hovoríme, že nekonečná rastúca postupnosť prirodzených čísel $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ je čarovná, ak pre všetky n platí $a_{2n} = 2a_n$. Dokážte nasledujúce tvrdenia:*

a) Ak máme danú čarovnú postupnosť a prvočíslo $p > a_1$, tak existuje člen postupnosti, ktorý je deliteľný p.

b) Pre každé prvočíslo $p > 2$, existuje čarovná postupnosť, ktorej žiaden člen nie je deliteľný p.

Riešenie. a) Ukážeme, že existuje p-členná aritmetická podpostupnosť s diferenciou menšou ako p. Keďže p je prvočíslo, členy postupnosti budú mať (po dvojiciach) rôzne zvyšky po delení p (dôkaz je triviálny - sporom), preto nejaký z nich musí byť deliteľný p - čím bude dôkaz hotový.

Pozrime sa na najmenší rozdiel dvoch po sebe idúcich čísel v postupnosti, označme si ho d, nech je medzi a_i a a_{i+1}. Keďže $2^k a_i = a_{2^k i}$ a $2^k a_{i+1} = a_{2^k(i+1)}$, platí:

$$2^k d = 2^k(a_{i+1} - a_i) = a_{2^k(i+1)} - a_{2^k i} = (a_{2^k(i+1)} - a_{2^k(i+1)-1}) + \dots + (a_{2^k i+1} - a_{2^k i})$$

Keďže d je najmenší rozdiel po sebe idúcich čísel v postupnosti, každý z rozdielov je aspoň d. Keďže je ich 2^k, musia byť všetky rovné d. Tvoria teda aritmetickú postupnosť dĺžky 2^k s diferenciou d. Keďže $d \leq a_2 - a_1 < p$, ak zvolíme k dostatočne veľké (napr. k $= p$), získame hľadanú aritmetickú podpostupnosť dĺžky (aspoň) p.

b) Ukážeme, že postupnosť $a_n = 2^{\lfloor log_2 n \rfloor} + pn$ je čarovná postupnosť v ktorej žiaden člen nie je deliteľný p.

Daná postupnosť je rastúca, $a_{n+1} = 2^{\lfloor log_2(n+1) \rfloor} + p(n+1) \geq 2^{\lfloor log_2 n \rfloor} + p(n+1) > 2^{\lfloor log_2 n \rfloor} + pn = a_n$.

Daná postupnosť je čarovná, lebo platí aj $a_{2n} = 2^{\lfloor log_2(2n) \rfloor} + p(2n) = 2^{\lfloor log_2 n \rfloor + 1} + 2pn = 2a_n$.

Keďže p je nepárne prvočíslo, $a_n = 2^{\lfloor log_2 n \rfloor} + pn \equiv 2^{\lfloor log_2 n \rfloor} (\text{mod } p) \not\equiv 0 \pmod p$, teda žiaden člen nie je deliteľný p.

Postupnosť s danými vlastnosťami existuje.

(Slavomír Hanzely)

Úloha C2. *Vo vrecúšku je n bielych a n čiernych loptičiek, ktoré sú očíslované číslami od 1 do $2n$ (každé je použité práve raz). Hráme nasledujúcu hru: V každom ťahu vyberieme (náhodne) jednu loptičku z vrecúška a umiestnime ju na stôl pred sebou. Potom, ak chceme, môžeme zobrať zo stola jednu čiernu a jednu bielu loptičku a vyhodiť ich do koša. Za to získame počet bodov, ktorý je rovný absolútnej hodnote rozdielu čísel na týchto dvoch loptičkách. V každom ťahu môžeme zahodiť najviac jednu dvojicu loptičiek. Nájdite najväčší možný počet bodov (v závislosti od n), ktorý môžeme s istotou získať po $2n$ ťahoch bez ohľadu na to, aké loptičky ťaháme a ako sú očíslované.*

Riešenie. Loptičky budeme zahadzovať nasledujúcim spôsobom: vždy zahodíme takú dvojicu, z ktorej jedna loptička bude mať číslo „malé“, t.j. od 1 po n a druhá bude mať číslo „veľké“, t.j. od $n+1$ po $2n$. Takto budú vo výslednom súčte všetky malé čísla s mínusom a všetky veľké s plusom, čiže výsledné skóre bude n^2 (kto neverí, nech si to zráta).

Najprv si ukážeme, že väčšie skóre nemôžeme dostať. Predpokladajme, že sme loptičky vyhodili v ľubovoľnom párovaní. Vyhodené loptičky si rozdeľme do dvoch skupín podľa toho, či boli v danej dvojici menšie alebo väčšie. V každej skupine si potom zoraďme čísla od najmenšieho po najväčšie. Ak si vezmeme skupinu menších čísel a označíme si ich zaradom ako $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak vieme povedať, že určite platí:$a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_n \geq n$, čiže ich súčet je aspoň $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$. Keďže výsledné skóre nie je nič iné ako rozdiel súčtu väčších a menších čísel, ten bude najväčší práve vtedy, ak bude súčet menších čísel čo najmenší, čiže $(n(n+1))/2$(keďže súčet menších a väčších čísel je konštantný). To znamená, že naozaj musíme vždy vyhodiť jedno veľké a jedno malé číslo, aby sme dostali čo najväčší súčet.

Teraz si ukážeme, že tento súčet vždy vieme dostať. Naša stratégia bude nasledovná: v prvých n ťahoch nebudeme zahadzovať žiadne loptičky. V každom ďalšom ťahu však už zahodíme jednu dvojicu a to tak, ako sme už popísali vyššie t.j. vždy zahodíme jednu malú jednej farby a jednu veľkú druhej farby. Ukážeme, že v každom ťahu dokážeme vyhodiť jednu takú dobrú dvojicu.

Predpokladajme, že sa nám už úspešne podarilo zahodiť $k-1$ párov loptičiek. Ak sme si teraz vytiahli ďalšiu loptičku, tak máme na stole spolu $n-k+2$ loptičiek. Keďže sme v každom ťahu keď sme zahodili loptičku zahodili práve jednu, ktorá bola malá, práve jednu veľkú, práve jednu čiernu a práve jednu bielu, tak sme z každej z týchto skupín loptičiek zahodili $k-1$ kusov, čiže na stole a vo vrecúšku ich spolu ostalo $n-(k-1)=n-k+1$, čo je však viac ako počet loptičiek vo vrecúšku, čiže na stole musí byť aspoň jedna čierna, aspoň jedna biela, aspoň jedna veľká a aspoň jedna malá loptička.

Ak máme na stole jednu čiernu veľkú loptičku a jednu bielu malú loptičku, tak sme hotoví. Ak nemáme veľkú čiernu, tak keďže tam čierna musí byť, ako sme už ukázali, tak tam bude čierna malá loptička. Keďže tam musí byť aj nejaká veľká loptička a z čiernej takú nemáme, tak tam je určite biela veľká loptička. To znamená, že v tomto prípade môžeme zahodiť čiernu malú a bielu veľkú loptičku. Ak nemáme bielu malú loptičku, tak keďže tam biela musí byť, tak je tam určite biela veľká a keďže tam musí byť nejaká malá loptička, a biela taká nie je, tak tam musí byť čierna malá. Tieto dve zahodíme a sme hotoví. To znamená, že vždy môžeme zahodiť dobrú dvojicu, a preto vieme vždy dosiahnuť skóre n^2.

(Laura Vištanová)

Úloha A2. *Nech n je dané prirodzené číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Pre prirodzené číslo j $(1 \leq j \leq n)$, definujeme b_j ako počet takých indexov i, že $a_i \geq j$. Napríklad, ak $n=3$ a $a_1 = 1$,$a_2 = 2$, $a_3 = 1$, potom $b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$. Dokážte, že pre všetky prirodzené k platí:*

$$\sum_{i=1}^{n}(i+a_i)^k \geq \sum_{i=1}^{n}(i+b_i)^k.$$

Riešenie. Začneme tým, že dokážeme jednoduchú pomocnú nerovnosť:

Lema. *Nech $a \geq b$, $i \geq j$ sú nezáporné reálne čísla. Potom $(a+i)^k+(b+j)^k \geq (a+j)^k+(b+i)^k$.*

Dôkaz. *Ak označíme $a+j=X$, $b+i=Y$, pričom BUNV $X \geq Y$. Ďalej, nech $i-j=d \geq 0$. Teraz nerovnosť prepíšeme na tvar $(X+d)^k+(Y-d)^k \geq X^k+Y^k$. Po roznásobení pomocou binomickej vety a odčítaní X^k+Y^k dostaneme*

$$\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}d^i(X^{k-i}+Y^{k-i}(-1)^i) \geq 0.$$

Táto nerovnosť však triviálne platí, keďže $X \geq Y$, a teda každý člen je nezáporný.

Všimnime si, že ak vymeníme hodnoty a_i a a_j, pre nejaké i, j, tak sa hodnoty b-čok nezmenia. Ak $a_i > a_j$ a $i > j$, pre nejakú dvojicu i, j, tak po ich vymenení sa hodnota ľavej strany nezväčší a pravá strana sa nezmení. Zrejme po istom počte týchto krokov (vymienaní dvojíc a_i a a_j s $a_i > a_j$ a $i > j$) sa dostaneme do situácie keď $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Hodnota ľavej strany dokazovanej nerovnosti sa zmenšila alebo zostala zachovaná a pravá sa nezmenila. Preto je zrejmé, že stačí, ak nerovnosť dokážeme pre tento prípad - ak $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.

V skutočnosti ukážeme viac než danú nerovnosť. Ukážeme, že v tomto prípade nastáva rovnosť a to tak, že ukážeme, že neusporiadané n-tice $a_1 + 1, \dots, a_n + n$ a $b_1 + 1, \dots b_n + n$ sú rovnaké. Ukážeme si dva spôsoby ako to ukázať.

Prvý bude dôkaz indukciou vzhľadom na súčet $a_1 + \cdots + a_n$. Ak $a_1 = \cdots = a_n = 0$, tak aj $b_1 = \cdots = b_n$, takže to platí. Ďalej predpokladajme, že to platí pre všetky súčty menšie ako $a_1 + \cdots + a_n$. (V skutočnosti nám bude stačiť o 1 menší, ale tak keď môžeme predpokladať platnosť pre všetky menšie, tak prečo nie.) Nájdime index m taký, že $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = k$ a $a_{m+1} < k$, pre vhodné k. Taký index i vždy existuje, okrem prípadu, keď $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Vtedy položíme $m = n$. Teraz využijeme indukčný predpoklad pre $a_1, \dots, a_{m-1}, a_m - 1, a_{m+1}, \dots a_n$. Nech b'_i sú hodnoty b pre túto zmenenú n-ticu (teda a_m sme zmenšili o 1). Jasne platí $b_i = b'_i$ pre $i \neq k$ a $b_k = m$, $b'_k = m - 1$.

Teraz sa pozrime na n-ticu čísel tvaru $a_i + i$. Vidíme, že jediná zmena, ktorá nastala keď sme a_m zmenšili o 1, je že namiesto $a_m + m = k + m$ máme len $k + m - 1$. Tak isto, keď sa pozrieme na čísla $b_i + i$, tak jediná zmena, ktorá nastala je, že namiesto $b_k + k = m + k$ máme $m + k - 1$. Avšak z indukčného predpokladu vieme, že po nahradení čísla $k + m$ číslom $k + m - 1$ dostaneme rovnaké n-tice. To však nutne znamená, že aj pred tým sme mali rovnaké n-tice, čím je dôkaz indukciou ukončený.

Druhý dôkaz bude „nahlédnutím". Ak v štvorčekovej sieti zafarbíme vedľa seba n stĺpčekov štvorčekov, pri čom v prvom zafarbíme a_1 a v poslednom a_n, tak je zrejmé, že ak sa pozrieme na počty štvorčekov v jednotlivých riadkoch, tak to sú práve b_1 až b_n. Teraz nakreslíme lomenú čiaru z bodu $[0, n]$ do $[n, 0]$, pričom ideme po hranici zafarbenej oblasti. Vidíme, že sa skladá z n vodorovných a n zvislých úsekov.

A teraz kľúčová myšlienka. Otočme obrázok o $45°$ a pozrime sa na „výšku", v ktorej sa nachádzajú jednotlivé čiary, pri čom nulová výška je v bode $[0, 0]$. Ľahko si môžeme všimnúť, že príslušná výška je práve $a_i + i$ pre vodorovné čiary a $b_i + i$ pre zvislé čiary. No a keďže čiara začína a končí v rovnakej výške tak v každej výške musí byť rovnaký počet úsekov ktoré idú jedným smerom ako druhým. A to je všetko.

V každom prípade je nerovnosť dokázaná.

(Martin„Vodka" Vodička)

Úloha G2. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech E, F ležia na stranách AC, AB, pri čom ich vzdialenosť od stredu BC je rovnaká. Nech $P \neq A$ je druhý priesečník kružníc opísaným trojuholníkom ABC, AEF. Dotyčnice v bodoch E, F k opísanej kružnici trojuholníka AEF sa pretínajú v bode K. Dokážte, že $|\sphericalangle KPA| = 90°$.*

Riešenie. Výcuc z riešenia Tomáša Sásika:

Označme S stred strany FE a O stred kružnice opísanej trojuholníku FEA. Nad tetivou FE máme rovnosť obvodových uhlov $\sphericalangle FAE$ a $\sphericalangle FPE$. Nad tetivou PE máme rovnosť obvodových uhlov $\sphericalangle EFP$ a $\sphericalangle EAP$. Tento uhol sa nám cez obvodové uhly nad tetivou PC prenesie až na uhol $\sphericalangle PBC$. Z rovnosti dvoch uhlov v dvojici trojuholníkov máme podobnosť trojuholníkov FPE a BPC. Preto bod P je stredom špirálovej podobnosti zobrazujúcej úsečku FE na BC.

V tejto špirálovej podobnosti sa nám zobrazí aj bod S na bod M. Uvedomme si teraz, že body K, M, S a O ležia na jednej priamke, pretože všetky ležia na osi strany FE (pre každý si individuálne rozmyslite prečo). Zo špirálovej podobnosti (tej, o ktorej sme sa bavili) ďalej vyplýva rovnosť uhlov $\sphericalangle CEP$ a $\sphericalangle MSP$, čo sa dá cez susedné uhly pretransformovať na rovnosť $\sphericalangle PSO$ a $\sphericalangle PEA$. Uhol tejto veľkosti je aj $\sphericalangle PFA$, nakoľko je obvodový s $\sphericalangle PEA$ vzhľadom na tetivu AP v kružnici opísanej trojuholníku FAE.

Teraz si všimnime niečo z iného súdka. Bod K je priesečník dotyčníc kružnice opísanej trojuholníku FPE v bodoch F a E. O bode K na základe týchto faktov a viet o symediánach vieme povedať, že leží na symediáne trojuholníka PFE prechádzajúcej bodom P. Z tohto faktu vyplýva rovnosť uhlov $\sphericalangle KPE$ a $\sphericalangle SPF$.

Pozrime sa teraz na trojuholník PSF. Uhol $\sphericalangle OSF$ je pravý, preto platí: $|\sphericalangle PSO|+|\sphericalangle FPS|+|\sphericalangle EFP| = 90°$. Teda, očividne $|\sphericalangle PFA| + |\sphericalangle EFP| = 90° - |\sphericalangle FPS|$. Ale uhly $\sphericalangle EFP$ a $\sphericalangle PFA$ tvoria spolu uhol $\sphericalangle EFA$. Z faktu, že štvoruholník $FEPA$ je tetivový vieme povedať: $|\sphericalangle EFA| = 180° - |\sphericalangle EPA|$. Zároveň $|\sphericalangle EPA| = |\sphericalangle KPA| + |\sphericalangle KPE|$. Takže máme: $|\sphericalangle KPA| = |\sphericalangle EPA| - |\sphericalangle KPE| = 180° - |\sphericalangle EFA| - |\sphericalangle FPS| = 180° - |\sphericalangle PFA| - |\sphericalangle EFP| - |\sphericalangle FPS| = 90°$. Tým sme prosím pekne vyhrali.

(Peter „Pedro“ Súkeník)