Riešenie 4. série

Úloha A4. *Nech a, b, c sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí*

$$(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 \le 3\left(a^2+ab+b^2\right)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(c^2+ca+a^2\right)$$

Riešenie. Zaveďme si štandardné značenie

$$\sum_{\text{sym}} a^x b^y c^z = a^x b^y c^z + a^x b^z c^y + a^y b^x c^z + a^y b^z c^x + a^z b^x c^y + a^z b^y c^x = [x, y, z].$$

Tu si treba dať pozor, že potom platí napr.

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{sym}} a^3b^2c^2 = \sum_{\text{cyc}} a^3b^2c^2 = a^3b^2c^2 + a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3 \ne \sum_{\text{sym}} a^3b^2c^2.$$

Keď teraz roznásobíme celú našu nerovnosť, dostaneme

$$[4,2,0]+[4,1,1]+[3,3,0]+8[3,2,1]+\tfrac{5}{2}[2,2,2] \le 3[4,2,0]+\tfrac{3}{2}[4,1,1]+\tfrac{3}{2}[3,3,0]+6[3,2,1]+\tfrac{3}{2}[2,2,2].$$

Po odčítaní rovnakých členov z nej zostane iba

$$2[3,2,1] + [2,2,2] \le 2[4,2,0] + \tfrac{1}{2}[4,1,1] + \tfrac{1}{2}[3,3,0].$$

Jedna z najúčinnejších zbraní na symetrické polynomické nerovnosti nezáporných čísel je *Muirheadova nerovnosť*[1], podľa ktorej platí

$$\begin{aligned} 2[2,3,1] &\le 2[4,2,0], \\ \tfrac{1}{2}[2,2,2] &\le \tfrac{1}{2}[4,1,1], \\ \tfrac{1}{2}[2,2,2] &\le \tfrac{1}{2}[3,3,0]. \end{aligned}$$

Jednoduchým sčítaním dostaneme to, čo sme chceli. Pretože sme používali iba ekvivalentné úpravy, dokázali sme aj pôvodnú nerovnosť.

Poznámky opravujúceho. Úloha bola jednoduchá, čo sa našťastie odzrkadlilo aj na počte správnych riešení. Takéto riešenie má byť akási povinná jazda, resp. „default skill“ skúsenejších riešiteľov. Muirheadovu nerovnosť a prácu so symetrickými výrazmi si určite osvojte, lebo sa vám ešte neraz zídu. *(Filip Sládek)*

Úloha C4. *Nech $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ je preusporiadanie čísel $0, 1, \ldots, n$. Ťahom nazývame výmenu čísel a_i a a_j, ak sú súčasne splnené podmienky $a_i = 0$, $i > 0$ a $a_{i-1} + 1 = a_j$. Pre ktoré n sa dá konečným počtom ťahov z usporiadania $(1, n, n-1, \ldots, 3, 2, 0)$ vyrobiť usporiadanie $(1, 2, \ldots, n, 0)$?*

Riešenie. Usporiadanie $(1, 2, \ldots, n, 0)$ nazvime *trefné.* Ak $n = 1$ alebo 2, tak vidíme, že počiatočné usporiadanie je trefné. Predpokladajme teraz $n > 2$. Ak n je párne, tak po $\frac{n-2}{2}$ ťahoch dostaneme usporiadanie začínajúce $1, n, 0, \ldots$. V tomto usporiadaní už nie je možný ďalší ťah a ani nie je trefné. Preto n musí byť nepárne.

Usporiadanie nazvime (s, t)-schodisko ak s je prirodzené, t je celé nezáporné a sú splnené podmienky

- usporiadanie začína číslami $1, 2, \ldots, s-1, 0$,
- potom sa v ňom striedajú t-tice a s-tice čísel, z ktorých každá obsahuje najväčšie dovtedy nepoužité čísla zoradené vzostupne.

[1] Ak ju nepoznáš, kukni *http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf*.

Ak $s+t \mid n+1$ a zároveň $t>0$, tak po $\frac{n+1}{s+t}$ ťahoch z (s,t)-schodiska dostaneme $(s+1,t-1)$-schodisko. Opakovaním postupu dostaneme $(s+t,0)$-schodisko. Nech $s \mid n+1$. Potom ak $2s \nmid n+1$, tak z $(s,0)$-schodiska po $\frac{n+1}{s}-2$ ťahoch dostaneme usporiadanie, ktoré nie je trefné a zároveň už nie je možný ďalší ťah. Ak $2s \mid n+1$, tak $(s,0)$-schodisko je zároveň aj (s,s)-schodiskom. Z (s,s)-schodiska dostaneme po konečnom počte ťahov $(2s,0)$-schodisko.

Teraz sme pripravený dokázať, že ak $n>2$, tak $n+1=2^r$ pre r prirodzené. Keďže $n+1$ je párne, môžeme ho napísať ako $n+1=2^r q$, kde q je nepárne. Po $\frac{n-1}{2}$ ťahoch dostaneme z pôvodného usporiadania $(2,0)$-schodisko. Ak $r>1$, tak po konečnom počte ťahov dostaneme $(2^r,0)$-schodisko, lebo $2^k \mid n+1$ pre $k\in\{1,2,...,r-1\}$. Ak $q=1$, tak naše schodisko je trefné usporiadanie. Ak $q>1$, tak po $q-2$ ťahoch vznikne usporiadanie, kde n je naľavo od 0 a nie je trefné. Teda trefné usporiadanie sa dá konečným počtom ťahov získať iba pre $n=2$, alebo ak $n+1$ je mocninou 2. *(Ondrej Kováč)*

Úloha G4. *Nech $ABCD$ je štvoruholník vpísaný do kružnice k, body E, F, G, H sú stredy oblúkov AB, BC, CD, DA kružnice k, ktoré neobsahujú zvyšné body, a platí $|AC|\cdot|BD| = |EG|\cdot|FH|$. Dokážte, že priamky AC, BD, EG, FH sa pretínajú v jednom bode.*

Riešenie (podľa Martina Vodičku). Body $EFGH$ tvoria v tomto poradí tetivový štvoruholník, preto *Ptolemaiova veta* hovorí, že

$$|EG|\cdot|FH| = |EF|\cdot|GH| + |FG|\cdot|HE|.$$

Označme r polomer kružnice k a veľkosti uhlov $|\sphericalangle BAD|=\alpha$ a $|\sphericalangle ABC|=\beta$. Keďže na kružnici k je H stred oblúka AD, na ktorom neleží B, tak HB je os uhla ABD; obdobne GB je os uhla CBD. Teda $|\sphericalangle HBG| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| = \beta/2$. Z predchádzajúceho môžme použitím sínusových viet vyjadriť dĺžky

$$|AC| = 2r\sin\beta \qquad |BD| = 2r\sin\alpha$$
$$|GH| = 2r\sin\frac{\beta}{2} \qquad |EF| = 2r\sin\frac{\pi-\beta}{2}$$
$$|FG| = 2r\sin\frac{\alpha}{2} \qquad |HE| = 2r\sin\frac{\pi-\alpha}{2}.$$

Po dosadení týchto vzťahov postupne dostávame

$$|EG|\cdot|FH| = |EF|\cdot|GH| + |FG|\cdot|HE| = r^2\sin\frac{\pi-\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + 4r^2\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} =$$
$$= 4r^2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + 4r^2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 2r^2\sin\beta + 2r^2\sin\alpha,$$

pričom sme využili, že $2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \sin\beta$.

Takisto dosadením obdržíme

$$|AC|\cdot|BD| = 4r^2\sin\alpha\sin\beta.$$

Vďaka nenulovosti r môžme predeliť a podmienka zo zadania sa redukuje na ekvivalentnú podmienku

$$2\sin\alpha\sin\beta = \sin\alpha + \sin\beta.$$

Zrejme $\alpha,\beta\in(0,\pi)$, a preto $\sin\alpha,\sin\beta\in(0,1\rangle$. Takže $\sin\alpha\sin\beta\le\sin\alpha$, a takisto $\sin\alpha\sin\beta\le\sin\beta$. Sčítaním týchto nerovníc dostávame

$$2\sin\alpha\sin\beta \le \sin\alpha + \sin\beta.$$

Rovnosť nastane iba ak bude rovnosť v oboch čiastkových nerovniciach, a to je práve vtedy, keď $\alpha = \frac{\pi}{2} = \beta$. Preto $ABCD$ je vždy obdĺžnik a tvrdenie zo zadania triviálne platí, dokonca hľadaný spoločný priesečník je stred kružnice k.

Poznámky opravujúceho. Všetky poslané riešenia mali tú istú štruktúru: objaviť osi uhlov, sínusovou vetou vyjadriť dĺžky, dosadiť do podmienky v zadaní a analyzovať goniometrickú rovnicu. Podľa výberu uhlov ste sa dopracovali k viac či menej elegantnejším rovniciam, ktoré nebolo celkom ľahké doriešiť. Za zmienku stojí riešenie Štěpána Šimsu, ktorý vďaka konkávnosti funkcie sínus na intervale $\langle 0, \pi\rangle$ výhodne použil *Jensenovu nerovnosť.* *(Filip Sládek)*

Úloha N4. *Nech $p \geq 5$ je prvočíslo a $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$. Ukážte, že n delí $2^n - 2$.*

Riešenie. Ponajprv n je celé číslo, pretože

$$2^{2p} - 1 \equiv 4^p - 1 \equiv 1^p - 1 \equiv 0 \pmod 3.$$

Našim cieľom bude ukázať $n \mid 2^{2p} - 1$ a $2p \mid n - 1$.

Zo zadania $3n = 2^{2p} - 1$, takže $n \mid 2^{2p} - 1$, čo vieme inak zapísať ako

$$2^{2p} \equiv 1 \pmod n. \tag{1}$$

Využitím *Malej Fermatovej vety* máme

$$p \mid 4^{p-1} - 1 = 2^{2p-2} - 1,$$
$$p \mid 2^{2p-2} - 1 \mid 2^{2p} - 4 = 3(n-1).$$

Ľahko si všimneme, že n je nepárne, preto $2 \mid n - 1$. Keďže p je prvočíslo väčšie ako 3, tak $(p, 3) = (p, 2) = 1$. Z týchto pozorovaní priamo dostávame $p \mid n - 1$, a hneď aj $2p \mid n - 1$. Preto existuje nejaké celé číslo k také, že

$$k \cdot 2p = n - 1. \tag{2}$$

Nakoniec dáme dokopy všetko, čo už máme (využijeme (2) a (1)):

$$2^n - 2 = 2\big(2^{n-1} - 1\big) = 2\big(2^{k\cdot 2p} - 1\big) = 2\big(\big(2^{2p}\big)^k - 1\big) \equiv 2\big(1^k - 1\big) = 0 \pmod n.$$

Teda $n \mid 2^n - 2$, čo sme mali dokázať.

Poznámky opravujúceho. Mnohí z vás sa s úlohou elegantne vysporiadali. Drvivá väčšina riešení sa uberala rovnakou cestou ako vzorák, až na malé technické odlišnosti. Za zmienku stojí riešenie *Roberta Navrátila*, ktorý si všimol, že zadanie platí pre ľubovoľné prirodzené číslo $x > 1$, prvočíslo $p > x^2 - 1$ a $n = \frac{x^{2p}-1}{x^2-1}$. Toto zovšeobecnenie som ocenil bodom naviac. *(Matúš Stehlík)*